Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur : Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Chapitre VI : Diagonalisation

Table des matières

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

1 Définitions

Définition.

(i) Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice associée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de f soit diagonale.

(ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple. Toute matrice diagonale est diagonalisable.

1.1 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f diagonalisable sur $\mathbb{K}$;

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$;

(iii) pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Évident.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $\mathcal{B}$ une telle base de E et soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)P$ soit diagonale. Posons $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P$. On a alors $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)Q$ diagonale.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)P$ soit diagonale. Notons $\mathcal{B}$ la base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ diagonale. $\square$

Exemples.

1. Soit h_λ l'homothétie de $\mathbb{R}^2$ de rapport λ, i.e. $h_\lambda(u) = \lambda u$, $u \in \mathbb{R}^2$. Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_2$ qui est diagonale.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $y = x$ parallèlement à la droite d'équation $x = 0$. On a vu que dans la base $\mathcal{B}' = ((1,1),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Donc p est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ parallèlement à la droite d'équation $x = 0$. On a vu que dans la base $\mathcal{B}' = ((1,1),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Donc s est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
4. Plus générlaement, on peut voir que toute projection ou symétrie de E est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

2 Éléments propres

2.1 Définition

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que

(i) un vecteur u de E est un vecteur propre de f sur $\mathbb{K}$ si $u \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$;

(ii) un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f sur $\mathbb{K}$ s'il existe un vecteur $u \in E$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$.

Si u et λ sont comme ci-dessus, on dit que u est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

Définition. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que

(i) $U \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A sur $\mathbb{K}$ si $U \neq 0_{n1}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A \cdot U = \lambda U$;

(ii) $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A sur $\mathbb{K}$ s'il existe $U \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $A \cdot U = \lambda U$.

Si U et λ sont comme ci-dessus, on dit que U est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

⚠ Contrairement à un vecteur propre, une valeur propre peut être nulle. De plus, il est possible qu'un endomorphisme (une matrice carrée) n'est pas de valeur propre dans $\mathbb{K}$. Il est aussi possible qu'un endomorphisme ne soit tout simplement pas diagonalisable.

Dans la suite, nous énoncerons des résultats pour les endomorphismes de E qui peuvent être facilement adaptés aux matrices carrées.

Notation. L'ensemble des valeurs propres sur $\mathbb{K}$ d'un endomorphisme f de E est noté $\mathrm{spec}_{\mathbb{K}}(f)$.

2.2 Propriétés

2.1 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$0 \text{ valeur propre de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\,(f) \neq \{0_E\}.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemples.

1. Les vecteurs $(1,1)$ et $(0,1)$ sont des vecteurs propres pour la projection p pour les valeurs propres 1 et 0 resp.

2. Les vecteurs $(1,1)$ et $(0,1)$ sont des vecteurs propres pour la symétrie s pour les valeurs propres 1 et -1 resp.

Définition. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Supposons que λ soit une valeur propre de f. On pose alors

$$E_\lambda := \{u \in E : \ f(u) = \lambda u\}$$

appelé sous-espace propre de f pour la valeur propre λ.

2.2 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors E_λ est un sous-espace propre non nul. En fait $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.*

De plus les sous-espaces propres sont en somme directe deux à deux.

Démonstration. Exercice. □

2.3 Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$\begin{aligned} & f \text{ diagonalisable sur } \mathbb{K} \\ \Longleftrightarrow \quad & \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f \text{ sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Démonstration. Implication directe. Supposons f diagonalisable. Alors il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale, i.e. les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f.

Implication réciproque. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonale, i.e. f diagonalisable. □

2.4 Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$\begin{aligned} & f \text{ diagonalisable sur } \mathbb{K} \\ \Longleftrightarrow \quad & E = \textstyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{K}}(f)} E_\lambda. \end{aligned}$$

Exemple. Soit r_θ la rotation de $\mathbb{R}^2$ centrée en 0 d'angle θ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$r_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Si (x,y) est un vecteur propre de r_θ, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que (x,y) soit solution de

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta & 0 \end{array}\right)$$

Supposons $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. On peut alors diviser la deuxième ligne par $\sin\theta$ et ajouter $(\lambda - \cos\theta)$ fois cette nouvelle deuxième ligne à la première. On obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{\sin^2\theta + (\lambda - cos\theta)^2}{\sin\theta} & 0 \\ 1 & \frac{\lambda - \cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{array}\right)$$

Comme $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, $sin^2\theta + (\lambda - cos\theta)^2 > 0$. Ce système linéaire est dans ce cas de rang 2 et n'a que $(0,0)$ comme solution. La rotation r_θ n'a donc pas de vecteur propre si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, i.e. r_θ non diagonalisable.

Si $\theta \equiv 0\,[\pi]$. Dans ce cas, si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(r_\theta)$ est diagonale, i.e. r_θ est diagonalisable et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de r_θ. Plus précisément, si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, r_θ a pour unique valeur propre 1 et si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, r_θ a pour unique valeur propre -1.

Exemple. Projection dans $\mathbb{R}^3$. Prenons p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \mathrm{vect}((1,1,0,(0,1,1))$ parallèlement à $G = \mathrm{vect}((0,0,1))$. Alors p est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, a pour valeurs propres 1 et 0 avec $E_1 = F$ et $E_0 = G$.

3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

3.1 Calcul des valeurs propres

3.1 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } f \quad\Longleftrightarrow\quad E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}.$$

Démonstration. Évident □

3.2 Corollaire. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On a*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } f \quad\Longleftrightarrow\quad \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f - \lambda\mathrm{id}_E)) = 0.$$

Remarque. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \quad\Longleftrightarrow\quad \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$) et $\mathcal{B}$ une base de E. Le polynôme caractéristique χ_f de f (reps. χ_A de A) est défini par

$$\chi_f(X) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f - X\mathrm{id}_E)) \text{ (resp. } \chi_A = \det(A - XI_n)).$$

Remarque. chi_f ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

3.3 Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } f \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda \textit{ est racine de } \chi_f.$$

Idem pour les matrices carrées.

Exemples.

(1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que sa matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_f(X) = (3-X)^2(2-X)$. Les valeurs propres de f sont donc 2 et 3.

(2) Reprenons l'exemple de la rotation r_θ. On a $\chi_{r_\theta}(X) = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geqslant 0$ qui s'annule seulement si $\theta \equiv 0\,[\pi]$. Dans ce cas la valeur propre est 1 si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ et -1 si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$.

3.2 Détermination des sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que f possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Rappelons que le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ est donné par

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$

Déterminer E_λ revient à résoudre le système linéaire homogène

$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \,|\, 0)\,,$$

où $\mathcal{B}$ est une base de E.

Notons A la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Soit $\mathcal{B}'$ la réunion des bases des différents sous-espaces propres de f. Comme ces derniers sont en somme directe, cette famille est libre. On a

$$f \text{ diagonalisable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{B}' \text{ est une base de } E.$$

Dans ce cas, si on pose

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'},$$

alors P est inversible et c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ de E à la base $\mathcal{B}$ de E. Posons de plus

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f).$$

Comme $\mathcal{B}'$ est une base de E formée de vecteurs propres de f, cette matrice est diagonale et ses coefficients diagonaux sont constitués des valeurs propres de f. D'après la formule de changement de base, on obtient alors la formule

$$A = PDP^{-1}.$$

Exemple. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A ci-dessus.

Base de E_2. On a $(x,y,z) \in E_2$ ssi (x,y,z) est solution de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient donc $E_2 = \mathrm{vect}((2,1,0))$.

Base de E_3. On a $(x,y,z) \in E_2$ ssi (x,y,z) est solution de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient donc $E_3 = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,0,1))$.

Si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 Une application : calcul des puissances d'une matrice carrée

4.1 Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Supposons que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in M_n(\mathbb{K})$ tels que*

$$A = PDP^{-1}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple. Reprenons la matrice A de l'exemple ci-dessus. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2.3^n & 0 \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2.3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$