Groupes de Lie et algèbres de Lie

9 octobre 2019

Table des matières

1 Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$

La notation $\mathbb{K}$ désigne un corps pouvant être soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des matrices carrés $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est un espace de dimension n^2 et toutes les normes sur cet espaces sont donc équivalentes. On suppose $\mathbb{K}^n$ muni de la norme usuelle provenant du produit scalaire canonique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et du produit hermitien canonique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Munissons $M_n(\mathbb{K})$ de la norme d'opérateur

$$\|X\| := \sup_{x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Xv\|}{\|x\|} .$$

Cette norme vérifie

$$\|XY\| \leqslant \|X\| \|Y\|, \quad X, Y \in M_n(\mathbb{K}) . \tag{1.1}$$

L'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ est donc munie d'une norme qui en fait un espace de Banach.

Rappelons maintenant quelques propriétés du groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.1. *Le groupe des matrices inversibles* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *est un groupe topologique pour la topologie induite de celle de* $M_n(\mathbb{K})$*. De plus* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *est un ouvert dense dans* $M_n(\mathbb{K})$*.*

Démonstration. Considérons l'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. C'est une application polynomiale, donc continue, et le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est l'image réciproque de $\mathbb{K}^*$. Ceci montre que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$. Le produit matriciel est continu d'après (1.1). D'autre part, l'inverse de $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est donné par $X^{-1} = \det(X)^{-1}\, {}^t\widetilde{X}$, où $\widetilde{X}$ désigne la comatrice de X. Les coefficients de la comatrice de X sont des fonctions polynomiales en les coefficients de X. Ceci montre que le passage à l'inverse est une application continue. Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est ainsi muni d'une structure de groupe topologique. Soient $X \in M_n(\mathbb{K})$ non nul et λ_0 le plus petit module non nul des modules des valeurs propres de X dans $\mathbb{C}$. Alors la matrice $X - \lambda I_n$ a toutes ses valeurs propres non nulles si $0 < |\lambda| < \lambda_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et est donc inversible. Ceci montre que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$. $\square$

Comme $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$, l'espace tangent à $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ en l'identité s'identifie à $M_n(\mathbb{K})$. Le produit dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ donne par différentiation un "crochet de Lie" sur $M_n(\mathbb{K})$. Nous verrons cela de manière plus générale dans la suite. Pour le moment, munissons $M_n(\mathbb{K})$ de l'opération suivante :

$$(X,Y) \mapsto [X,Y] := XY - YX, \quad X,Y \in M_n(\mathbb{K})\,.$$

On remarque que c'est une application bilinéaire antisymétrique de $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$. Elle vérifie d'autre part l'**identité de Jacobi** :

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0\,. \tag{1.2}$$

Définition 1.1. Une **algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application (appelée "crochet de Lie") :

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

bilinéaire, antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi (1.2).

Une **sous-algèbre de Lie** de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable par crochet de Lie.

Un **idéal** I de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que, pour tous $X \in I$ et $Y \in \mathfrak{g}$, $[X,Y] \in I$.

Exemples 1.1.

- Nous avons vu que $M_n(\mathbb{K})$ est une algèbre de Lie. On la note $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Plus généralement, si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathrm{End}(V)$ est une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(V)$.
- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ des matrices de trace nulle.
- $\mathfrak{b}(n,\mathbb{K})$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures.
- $\mathfrak{n}(n,\mathbb{K})$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes. C'est un idéal de $\mathfrak{b}(n,\mathbb{K})$.
- $\mathfrak{so}(n)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.
- $\mathfrak{su}(n)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ des matrices antihermitiennes.

- Soit M une variété différentiable et $\mathcal{X}(M)$ l'espace des champs de vecteurs sur M. Alors $\mathcal{X}(M)$ muni du crochet de Lie des champs de vecteurs est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. Un morphisme d'algèbres de Lie est une application linéaire entre algèbres de Lie respectant le crochet de Lie. Un morphisme d'algèbres de Lie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ est appelée représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace vectoriel V.

2 L'application exponentielle

Définition 2.1. Soit X un élément de $M_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle de X, notée $\exp X$, désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach $M_n(\mathbb{K})$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} .$$

Donnons quelques propriétés de l'exponentielle.

Proposition 2.1. *Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$.*

(i) Si X et Y commutent (i.e., $[X,Y] = 0$), $\exp X \exp Y = \exp(X+Y)$.

(ii) L'exponentielle est à valeurs dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X) .$$

(iii) Pour tous $t, s \in \mathbb{K}$,

$$\exp(sX)\exp(tX) = \exp((s+t)X) .$$

(iv) L'application $\mathbb{K} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tX)$, est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = Xa(t)$$

avec condition iniitale $a(0) = I_n$.

(v) L'application $\mathbb{K} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tX)$, est l'unique solution différentiable de l'équation fonctionnelle

$$a(s)a(t) = a(s+t), \quad a(0) = I_n, \quad a'(0) = X .$$

(vi) Pour tout $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $g \exp X g^{-1} = \exp(gXg^{-1})$.

Démonstration. Démontrons (i). On a

$$\exp X \exp Y = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Y^n}{n!}\right) = \sum_{k,l=0}^{+\infty} \frac{X^k Y^l}{k!l!}\,.$$

Si X et Y commutent, alors

$$\exp(X+Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X+Y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} X^k Y^l \sum_{k,l=0}^{+\infty} \frac{X^k Y^l}{k!l!}\,.$$

On en déduit immédiatement (ii) et (iii).

La série définissant l'exponentielle étant à convergence normale, on peut dériver terme à terme. On obtient

$$\frac{d}{dt}(\exp tX) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n X^{n+1}}{n!} = X \exp(tX) = \exp(tX) X\,.$$

Comme $\exp(0) = I_n$, on voit que $t \mapsto \exp tX$ est une solution de l'équation différentielle du (iv).

Supposons que $a(t)$ soit une autre solution. On a

$$\frac{d}{dt}(\exp(-tX)a(t)) = \exp(-tX)(-X)a(t) + \exp(-tX)a'(t) = 0\,.$$

On en déduit que $a(t) = \exp(tX)$.

Montrons (v). Soit $a(t)$ une solution de l'équation fonctionnelle. On a

$$\frac{d}{dt} a(t) = \lim_{s \to 0} \frac{a(t+s) - a(t)}{s} = a(t) \lim_{s \to 0} \frac{a(s) - I_n}{s} = a(t)a'(0) = a(t)X\,.$$

L'assertion découle alors de (iv).

(v) est évident. □

Remarque. On peut reformuler (iii) en disant que

$$t \mapsto \exp(tX)$$

est un morphisme de groupes (continu) de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. On appelle un tel morphisme un **sous-groupe à un paramètre** de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Proposition 2.2. *L'application exponentielle*

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa différentielle à l'origine est l'application identique de $M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. L'exponentielle étant définie par une série normalement convergente, elle est $\mathcal{C}^\infty$. On a

$$\| \exp(X) - \exp(0) - X\| = \|X\epsilon(X)\| .$$

avec $\epsilon(X) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{X^k}{(k+1)!}$. Cette fonction est définie par une somme normalement convergente, donc est continue, et $\epsilon(0) = 0$. Ceci montre que la différentielle de l'exponentielle à l'origine est l'application identique de $M_n(\mathbb{K})$. Le calcul de la différentielle fera l'objet d'un exercice. □

Corollaire 2.3. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de I_n dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tels que l'application exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.*

Démonstration. Conséquence du théorème d'inversion locale. □

Remarque. On verra en TD que quitte à restreindre les ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ dans le corollaire ci-dessus, l'inverse de l'exponentielle est donnée par une série. On note $\log : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ cet inverse. On montre que, pour tout $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ et tout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit :

$$\log(\exp(tX)\exp(tY)) = tX + tY + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^3) .$$

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff calcule le développement à tout ordre en t. L'essence de la formule est que le terme en t^n peut s'exprimer partir de crochets successifs de X et Y.

3 Groupes linéaires

Définition 3.1. On appelle groupe linéaire tout sous-groupe du groupe général linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Remarque. Tout sous-groupe d'un groupe linéaire est linéaire. Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est linéaire car on peut le plonger naturellement dans $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$.

Exemples 3.1.

– Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ des matrices de déterminant 1.

– Le groupe $\mathrm{B}(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles.

– Le groupe $\mathrm{N}(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures avec que des 1 sur la diagonale.

– Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ des matrices orthogonales (réelles) de déterminant 1.

– Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ des matrices unitaires (complexes) de déterminant 1...

Définition 3.2. Soit G un groupe linéaire, disons $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. L'espace tangent $\mathfrak{g}$ à G en I_n est l'espace des matrices $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ telle qu'il existe une courbe $a(t)$, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ autour de 0, de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans G, et vérifiant $a(0) = I_n$ et $a'(0) = X$.

Donnons la propriété fondamentale de cet espace tangent.

Proposition 3.1. *L'espace tangent* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient $a(t)$ et $b(t)$ des courbes de classe $\mathcal{C}^1$ dans G vérifiant $a(0) = b(0) = I_n$ et $a'(0) = X$, $b'(0) = Y$. Posons $c(t) = a(\alpha t)b(\beta t)$. On a bien $c(0) = I_n$ et $c'(0) = \alpha X + \beta Y$. Ceci montrer que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Montrons maintenant que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Posons, pour s suffisamment proche de 0,

$$c_s(t) = a(s)b(t)a(s)^{-1} .$$

C'est une courbe dans G vérifiant $c_s(0) = I_n$ et $c_s'(0) = a(s)Ya(s)^{-1}$. Ceci montre que $a(s)Ya(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$ pour s suffisamment proche de 0. Maintenant $s \mapsto a(s)Ya(s)^{-1}$ est une courbe dans $\mathfrak{g}$ et son vecteur tangent en 0 est dans $\mathfrak{g}$. Donc

$$[X, Y] = XY - YX = \frac{d}{ds}\left(a(s)Ya(s)^{-1}\right)_{|s=0} \in \mathfrak{g} .$$

□

On appelle $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe linéaire G. Un résultat crucial dans la théorie des groupes linéaires est que l'application exponentielle renvoie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le groupe G.

Théorème 3.2. *Soient G un groupe linéaire et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors l'application* exp *envoie $\mathfrak{g}$ dans G.*

Démonstration. L'idée est la suivante. On a $\exp 0 = I_n$ et si $X \in \mathfrak{g}$, alors $\frac{d}{dt}(\exp tX)_{|t=0} = X$. Donc la courbe $c(t) = \exp tX$ passe par $I_n \in G$ en 0 et est tangente à G au point I_n. L'espace tangent à G en un point g quelconque de G peut s'identifier à $g\mathfrak{g}$. La courbe $t \mapsto gc(t)$ à valeurs dans G est donc tangente à G en $t = 0$, i.e., au point g. Il est donc raisonnable de croire que la courbe $c(t)$, qui est tangente en chaque point à G, reste dans G. Démontrons-le rigoureusement.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est par définition une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ pour un certain n. En particulier $k = \dim \mathfrak{g} \leqslant n^2$. Choisissons une base $X_1, \dots, X_k$ de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{s}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Pour tout $i = 1, \dots, k$, soit $a_i(t)$ une courbe dans G passant par I_n en 0 et dont la dérivée en 0 est le vecteur X_i. Les courbes a_i sont définies dans un voisinage ouvert de 0.

Posons, pour tout $X = t_1X_1 + \cdots + t_kX_k \in \mathfrak{g}$, avec les t_i suffisamment proches de 0,

$$\phi(X) = a(t_1)a(t_2)\cdots a(t_k),$$

pour tout $Y \in \mathfrak{s}$,

$$\psi(Y) = I_n + Y$$

et, pour tout $X + Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ avec $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{s}$,

$$k(X + Y) = \phi(X)\psi(Y)\,.$$

Calculons la différentielle de k en 0. On a

$$d\phi_0(X) = X, \quad d\psi_0(Y) = Y,$$

d'où $dk_0(X + Y) = X + Y$, i.e., dk_0 est l'application identique de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Cette différentielle en 0 étant inversible, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathfrak{s}$ tels que k soit un difféomorphisme de $U \times V$ sur un voisinage W de I_n dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Pour tout $a \in W$, posons $k^{-1}(a) = F(a) + H(a)$, avec $F(a) \in U$ et $H(a) \in V$. Si $H(a) = 0$, alors $a = \phi(F(a))\psi(0) = \phi(F(a))$ est dans G.

Soit $(X,Y) \in U \times V$. Alors pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ et tout τ dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$ suffisamment petit, on a

$$H(\phi(X + \tau Z)\psi(Y)) = Y\,.$$

Posons $a = k(X+Y)$. En différentiant en $\tau = 0$, on obtient

$$0 = dH_a(d\phi_X(Z)\psi(Y)) = dH_a(d\phi_X(Z)\phi(X)^{-1}a)\,. \tag{3.1}$$

La courbe

$$\tau \mapsto \phi(X+\tau Z)\phi(X)^{-1}$$

est une courbe différentiable dans G, valant I_n en 0 et dont la dérivée en 0 est

$$\frac{d}{d\tau}\left(\phi(X+\tau Z)\phi(X)^{-1}\right)_{|\tau=0} = d\phi_X(Z)\phi(X)^{-1}\,.$$

Ceci montre que $d\phi_X(Z)\phi(X)^{-1}$ est dans $\mathfrak{g}$.

Définissons $A_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $A_X(Z) = d\phi_X(Z)\phi(X)^{-1}$. C'est une application linéaire qui dépend continûment de X. Remarquons que $A_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, étant donné que $d\phi_0(Z) = Z$ et $\phi(0) = I_n$. En particulier, $\det A_0 \neq 0$. Par continuité, $\det A_X \neq 0$ pour X dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. Quitte à réduire U, on peut supposer que tel est le cas pour tous les X dans U.

L'équation (3.1) donne

$$0 = dH_a(A_X(Z)a)$$

pour tout X suffisamment proche de 0 dans $\mathfrak{g}$. L'application linéaire A_X étant inversible pour X dans U, ceci peut alors se réécrire

$$0 = dH_a(Za)\,. \tag{3.2}$$

Montrons maintenant que exp envoie $\mathfrak{g}$ dans G. Soit $X \in \mathfrak{g}$ et posons $b(t) = \exp(tX)$. Pour t suffisamment proche de 0, $b(t)$ est dans W, et donc on peut appliquer (3.2) pour $b(t)$ ce qui donne

$$0 = dH_{b(t)}(Xb(t)) = \frac{d}{dt}H(b(t))\,.$$

La fonction $t \mapsto H(b(t))$ est donc constante dans un voisinage de 0. Comme on a $H(b(0)) = 0$, cette fonction constante est nulle. Ceci montre que $\exp(tX) = b(t) \in G$ pour t dans ce voisinage de 0.

Il reste à étendre cette relation à tout $t \in \mathbb{R}$. Mais comme pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\exp(tX) = \left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right)\right)^k,$$

ceci est facilement établi. □

Corollaire 3.3. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *d'un groupe linéaire* G *dans* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *est l'ensemble des éléments* $X \in M_n(\mathbb{R})$ *tels que* $\exp(tX) \in G$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Une inclusion provient du théorème, l'autre de la définition de $\mathfrak{g}$ en considérant les courbes $t \mapsto \exp(tX)$ pour $X \in M_n(\mathbb{R})$. □

Corollaire 3.4. *Soient* G *un groupe linéaire dans* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Il existe un ouvert* $\mathcal{U}$ *dans* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *contenant l'identité tel que tout élément* $g \in \mathcal{U} \cap G$*, pouvant être relié dans* G *à l'identité par un chemin différentiable restant dans* $\mathcal{U}$*, est de la forme* $g = \exp X$ *pour un certain* $X \in \mathfrak{g}$.

Remarque. Cette propriété de l'exponentielle est subtile. Il se trouve des groupes linéaires G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tel que tout voisinage de l'identité contienne des éléments de G qui ne sont pas dans l'image de l'exponentiel (exemple : $\mathbb{Q}^\times$ dans $\mathbb{R}^\times = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$). Il existe aussi des groupes linéaires dont l'application exponentielle est surjective, et malgrè cela, possédant des éléments arbitrairement proche de l'identité ne pouvant être relié à celle-ci par un chemin différentiable dans G restant proche de l'identité (voir l'exemple suivant).

Exemple 3.1 (La droite dans le tore)**.** L'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est $i\mathbb{R}$. L'application exponentielle $\exp : i\mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$ est dans ce cas un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Le tore $\mathbf{T} = \mathbf{T}^2$ est la sous-variété $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, que l'on voit comme groupe linéaire par

$$(z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) .$$

Son algèbre de Lie est $\mathfrak{t} \simeq i\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$. Soit

$$X = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix} \in \mathfrak{t} .$$

Cet élément définit un sous-groupe à un paramètre L de $\mathbf{T}$:

$$t \mapsto \exp tX = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\beta} \end{pmatrix} .$$

La nature du sous-groupe à un paramètre L ainsi défini dépend du rapport α/β. Pour simplifier, nous supposons $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Si α/β est rationnel, disons $\alpha/\beta = p/q$ avec p et q premiers entre eux, alors L est une courbe fermée dans $\mathbf{T}$, dont le première composante décrit p rotations, tandis que la seconde en décrit q. On a $L \simeq \mathbb{R}/\frac{p}{\alpha}\mathbb{Z}$. Le groupe L est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. La topologie induite sur L par celle de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ coïncide avec la topologie quotient de $\mathbb{R}/\frac{p}{\alpha}\mathbb{Z}$.

Si α/β est irrationnel, alors $t \mapsto \exp tX$ est injective et L est dense dans $\mathbf{T}$. La topologie induite par celle de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ ne coïncide pas avec celle intrinsèque donnée par l'isomorphims Ł $\simeq \mathbb{R}$. En effet, un élément de L peut être très proche de l'identité pour la topologie induite, mais un chemin dans L le reliant à l'identité peut devoir faire plusieurs tours du tore.

Remarque. Une conséquence du théorème 3.2, tenant compte de la remarque 2, est que le produit dans un groupe linéaire, au voisinage de l'identité, est déterminé par la structure de son algèbre de Lie.

La définition d'un groupe linéaire G comme sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ pour un certain n munit G d'une topologie, la topologie induite qui en fait un groupe topologique. D'autre part, nous avons montré que l'exponentielle envoie $\mathfrak{g}$ dans G. Comme $\mathfrak{g}$ est naturellement en tant qu'espace vectoriel de dimension finie un espace topologique (un espace de Banach de dimension finie), on peut se servir de l'exponentielle pour munir G d'une autre topologie, la **topologie intrinsèque**. Une base de voisinages de l'identité est obtenue en prenant des voisinages de la forme $\exp U$, où u est un voisinage de 0 suffisamment petit dans $\mathfrak{g}$ (dans le domaine où l'exponentielle est injective). Par translation, nous obtenons une base de voisinages en chaque point de G, qui fait encore de G un groupe topologique. Dans cette topologie, au voisinage de chaque point, G "ressemble" à l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. En termes techniques, G est muni d'une **structure de variété différentiable**. Ceci permet de définir sur G la notion de fonction différentiable (et même $\mathcal{C}^\infty$). On dit alors que G est un **groupe de Lie**.

La quesiton évidente qui se pose alors est celle de la comparaison de ces deux topologies. Prenons un premier exemple, celui de l'inclusion de $\mathbb{Q}^\times$ dans $\mathbb{R}^\times = \mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$, qui fait de $\mathbb{Q}^\times$ un groupe linéaire. Comme $\mathbb{Q}^\times$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^\times$, on voit que son algèbre de Lie est réduite à $\{0\}$. La topologie intrinsèque de $\mathbb{Q}^\times$ est donc discrète, et ne coïncide pas avec la topologie induite, qui est moins fine.

C'est une conséquence directe des définitions que la topologie intrinsèque est toujours plus fine que la topologie induite, puisque l'exponentielle est continue. Le résultat suivant donne un critère simple pour que les deux topologies coïncident.

Théorème 3.5. *Soit G un groupe linéaire, muni de la topologie intrinsèque. Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit $\mathfrak{s}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{s}$ tel que l'application*

$$\Psi : H \times U \to G, \quad (h, Y) \mapsto h \exp Y$$

réalise un difféomorphisme de $H \times U$ dans un voisinage de H dans G.

Démonstration. Dans cet énoncé, H est bien entendu muni de sa topologie intrinsèque qui en fait un groupe de Lie, sinon on en pourrait pas parler de difféomorphisme. Montrons tout d'abord que la différentielle de

$$H \times \mathfrak{s} \to G, \quad (h, Y) \mapsto h \exp Y$$

est inversible en chaque point (h, X) avec X dans un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{s}$. Par translation à gauche par h^{-1}, il suffit de le montrer aux points (Id, X), et par continuité, il suffit de le démontrer pour le point $(\mathrm{Id}, 0)$. Mais en ce point, la différentielle de Ψ est seulement

$$\mathfrak{h} \times \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \mapsto X + Y$$

qui est inversible puisque $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$. Il découle du théorème d'inversion locale qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{s}$ tel que l'application

$$H \times U \to G, \quad (h, Y) \mapsto h \exp Y$$

est un difféomorphisme local sur un voisinage de H dans G, i.e., pour tout point $(h, Y) \in H \times U$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{h,Y}$ de (h, Y) dans $H \times U$ tel que Ψ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{V}_{h,Y}$ sur son image.

Il suffit de montrer qu'en prenant U plus petit, on peut faire en sorte que l'application ci-dessus devienne injective, et réalise ainsi un difféomorphisme sur son image.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, i.e., pour tout voisinage V de 0 dans $\mathfrak{s}$, il existe $h_1, h_2 \in H$ et $Y_1, Y_2 \in V$ avec $Y_1 \neq Y_2$ tels que

$$h_1 \exp Y_1 = h_2 \exp Y_2 \, .$$

Alors $\exp(Y_1) \exp(-Y_2) \in H$. Comme

$$\psi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{s} \to G, \quad (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y$$

est de différentielle inversible en $(0,0)$, ψ réalise un difféomorphisme d'un voisinage W de $(0,0)$ sur son image $\psi(W)$, qui est un ouvert contenant l'identité dans G. On voit que pour V assez petit, $\exp(Y_1)\exp(-Y_2) \in \psi(W)$ s'écrit de manière unique

$$\exp(Y_1)\exp(-Y_2) = \exp X \exp Y$$

avec $(X,Y) \in W$. On en déduit que l'on a $\exp Y \in H$. D'autre part, $Y \neq 0$, sinon l'égalité $\exp(Y_1)\exp(-Y_2) = \exp X$ donnerait

$$\exp X \exp Y_2 = \exp Y_1$$

et par unicité de l'écriture de $\exp Y_1$ (sous ψ), on aurait $Y_1 = Y_2$ (et $X = 0$). Mais on a supposé que $Y_1 \neq Y_2$.

On voit donc ainsi que l'on peut trouver $Y \neq 0$ dans $\mathfrak{s}$ aussi proche de 0 que l'on veut vérifiant $\exp Y \in H$. Soit une suite (Y_k) d'éléments non nuls vérifiant ces hypothèses et tendant vers 0 dans $\mathfrak{s}$. La suite $(\frac{Y_k}{\|Y_k\|})$ est bornée dans $\mathfrak{s}$ (on a choisi une norme quelconque sur $\mathfrak{s}$). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que cette suite converge. La limite est un élément Y de $\mathfrak{s}$ et de norme 1, donc non nul.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Prenons des entiers n_k tels que $n_k\|Y_k\|$ tende vers t (il suffit de prendre n_k tel que $n_k\|Y_k\| \leqslant t \leqslant (n_k+1)\|Y_k\|$). On a alors :

$$(\exp Y_k)^{n_k} = \exp(n_k Y_k) = \exp(n_k\|Y_k\|\frac{Y_k}{\|Y_k\|}) \to \exp(tY)\,.$$

Ceci montre, comme H est fermé, que $\exp(tY) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En conséquence, $Y \in \mathfrak{h}$ et, comme $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, on a $Y = 0$, ce qui donne une contradiction. □

Corollaire 3.6. *Soient G un groupe linéaire et H un sous-groupe fermé de G. Alors les topologies intrinsèques et induites de H coïncident, i.e., tout ouvert de H est l'intersection d'un ouvert de G avec H.*

Démonstration. Soit $h \in H$. Une base de voisinages de h dans G est donnée par des ouverts de la forme $h\exp V$, où V est un voisinage de 0 suffisamment petit dans $\mathfrak{g}$. Le théorème montre que pour tout V suffisamment petit, l'intersection de ce voisinage avec H est de la forme $h\exp U$, où $U = \mathfrak{h} \cap V$ est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}$. □

4 Ad, ad

Soit G un groupe linéaire, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

Le groupe G agit sur lui-même par conjugaison, et l'on note Ad cette action :

$$\mathrm{Ad}(x)y = xyx^{-1}\,.$$

Différentions cette action en l'identité : pour tout $Y \in \mathfrak{g}$,

$$d\mathrm{Ad}(x)_{\mathrm{Id}}(Y) = \frac{d}{dt}(x\exp(tY)x^{-1})_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(x\exp(tY)x^{-1}))_{t=0} = xYx^{-1}\,.$$

Ceci définit une application linéaire, encore notée $\mathrm{Ad}(x)$:

$$\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad Y \mapsto xYx^{-1}\,.$$

Cette application linéaire est en fait un morphisme d'algèbres de Lie. En effet

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad}(x)([Y,Z]) & = & x(YZ - ZY)x^{-1} \\ & = & xYx^{-1}xZx^{-1} - xZx^{-1}xYx^{-1} \\ & = & [\mathrm{Ad}(x)Y, \mathrm{Ad}(x)Z]\,. \end{array}$$

D'autre part, $\mathrm{Ad}(x)$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Ad}(x^{-1})$. Ceci montre que

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

est une application de G dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est facile de voir que c'est un morphisme de groupes. En particulier, Ad est une représentation de G dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. On l'appelle la représentation adjointe de G.

On peut différencier Ad en l'identité. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{rcl} d\mathrm{Ad}_{\mathrm{Id}} : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & \left[Y \mapsto \frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y)_{t=0}\right] = XY - YX = [X,Y]\,. \end{array}$$

On note $\mathrm{ad} = d\mathrm{Ad}_{\mathrm{Id}}$. Ainsi $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$. L'identité de Jacobi entraine que pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}([X,Y])(Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z)$$

ce qui montre que ad est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

D'autre part, toujours par l'identité de Jacobi, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}(X)([Y,Z]) = [\mathrm{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)(Z)]\,.$$

Définition 4.1. Une application linéaire $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant

$$A([Y, Z]) = [A(Y), Z] + [Y, A(Z)]$$

est appelée une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

On note $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$. On voit facilement que c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

5 Connexité et correspondance de Lie

En regardant la définition de l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire, on peut remarquer cette algèbre de Lie ne dépend que de la composante connexe du groupe contenant l'identité. Il existe plusieurs notions de connexité en topologie (connexité, connexité par arcs...). Pour les groupes linéaires, elles coïncident toutes, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Soit G un groupe linéaire, muni de sa topologie intrinsèque. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Deux éléments quelconques de G peuvent être reliés par un chemin continu.

(ii) G n'est pas l'union de deux ouverts disjoints non vides.

(iii) G est engendré par un voisinage ouvert quelconque de Id.

(iv) G est engendré par $\exp U$ *pour tout voisinage U de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$. Supposons (i) et soient U et V deux ouverts disjoints non vides de G dont la réunion est G. Alors un chemin continu reliant un élément de U à un élément de V donnerait une partition de l'intervalle de définition du chemin en deux ouverts non vides disjoints, qui est un contradiction sur le fait que ce soit un intervalle.

$(ii) \implies (iii)$. Supposons (ii) et soit G_0 le sous-groupe engendré par un voisinage ouvert de Id dans G. Alors G_0 est ouvert dans G, car il contient un voisinage de chacun de ses points (c'est clair pour Id et pour tout autre point de G_0 par translation). De même, chaque partie de la forme gG_0, $g \in G$, est ouverte dans G. Comme G peut être décomposé en une union disjointe de telles classes à gauche, (ii) entraîne $G = G_0$.

$(iii) \implies (iv)$. Cette implication est claire car $\exp U$ est un voisinage de Id, d'après la définition de la topologie intrinsèque.

$(iv) \implies (i)$. Si l'on suppose (iv), alors tout élément g de G peut se décomposer sous la forme

$$g = \exp X_1 \exp X_2 \cdots \exp X_k,$$

les X_i étant dans U. En particulier, étant donnés deux éléments a_0 et a_1 dans G, on peut écrire

$$a_1 = a_0 \exp X_1 \exp X_2 \cdots \exp X_k\,.$$

On prend alors $a(t) = a_0 \exp tX_1 \exp tX_2 \cdots \exp tX_k$.. C'est un chemin dans G vérifiant $a(0) = a_0$ et $a(1) = a_1$. □

Corollaire 5.2. *Soit G un groupe linéaire, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors la composante neutre G_0 de G (i.e., la composante connexe de G contenant* Id*) est le sous-groupe de G engendré par* $\exp \mathfrak{g}$*. C'est un sous-groupe ouvert, fermé, distingué de G et c'est l'unique sous-groupe ouvert connexe de G. La composante connexe d'un élément g de G est la classe à droite gG_0.*

Définition 5.1. Le groupe quotient G/G_0 est appelé **groupe des composantes connexes** de G.

Notons

$$\mathrm{Lie}\ : G \mapsto \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\,(G),$$

l'application qui à un groupe linéaire associe son algèbre de Lie.

Nous allons maintenant énoncer la correspondance de Lie qui met en bijection les groupes linéaires connexes et leurs algèbres de Lie. Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3 (Lemme de recouvrement de Baire)**.** *Soient G un groupe linéaire et $(A_i)_i$ une famille dénombrable de sous-ensembles de G telle que $G = \bigcup_i A_i$. Alors l'adhérence de l'un des A_i contient un ouvert de G.*

Démonstration. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,(G)$. Raisonnons par l'absurde. Si aucun des $\overline{A_i}$ ne contient un ouvert de G, le complémentaire de $\overline{A_1}$ est non vide, et donc, étant ouvert, il contient une partie de la forme $a \exp B_1$, où B_1 est la boule fermée dans $\mathfrak{g}$ de centre 0 et de rayon suffisamment petit pour que exp réalise un difféomorphisme de B_1 sur son image. Pour la même raison, le complémentaire de $\overline{A_2}$ dans $a \exp B_1$ est un ouvert non vide de G contenu dans $a \exp B_1$, et contient donc une partie de la forme $a \exp B_2$, où B_2 est une boule fermée de $\mathfrak{g}$ contenue dans B_1 (mais non nécessairement centrée en 0)... On construit ainsi une suite

$$\ldots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \ldots \subset B_1 .$$

L'intersection des B_i est non vide dans G mais n'intersecte aucun des $\overline{A_j}$. Cela donne une contradiction. □

Théorème 5.4 (Correspondance de Lie)**.** *L'application* Lie *réalise une bijection entre les sous-groupes connexes de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *et les sous-algèbres de Lie de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$*, dont la réciproque* $\Gamma : \mathfrak{g} \mapsto \Gamma(\mathfrak{g})$ *est donnée par :* $\Gamma(\mathfrak{g})$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *engendré par* $\exp \mathfrak{g}$*.*

Démonstration. Nous avons déjà démontré que si G est un groupe linéaire connexe, alors $\Gamma(\mathrm{Lie}\,(G)) = G$. Il reste à voir que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,(\Gamma(\mathfrak{g}))$ pour toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Comme $\exp(tX) \in \Gamma(\mathfrak{g})$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Lie}\,(\Gamma(\mathfrak{g}))$.

Plaçons-nous dans un voisinage U_1 de 0 dans $\mathfrak{g}$, où l'exponentielle réalise un homéomorphisme sur une partie V_1 de $\Gamma(\mathfrak{g})$ contenant Id, la réciproque étant donnée par log.

Prenons un ouvert $U \subset U_1$ tel que la fonction

$$C : \overline{U} \times \overline{U} \to \mathfrak{g}, \quad (X,Y) \mapsto \log(\exp(X)\exp(Y))$$

soit bien définie ($C(X,Y)$ est donné par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff). De plus, on peut prendre pour U une boule ouverte de centre 0, de sorte que $\overline{U}$ soit une boule fermée, donc compacte. On suppose de plus que U est tel que $\exp U \exp U \subset V_1$. Posons $W = C(U,U)$ de sorte que $\exp W = \exp U \exp U$. Comme $C(0,Y) = Y$, la fonction $Y \mapsto C(0,Y)$ a une différentielle en $Y = 0$ de rang $\dim \mathfrak{g}$, et par continuité, la fonction $Y \mapsto C(X,Y)$ a la même propriété pour X suffisamment proche de 0. Le théorème d'inversion locale implique alors que $Y \mapsto C(X,Y)$ est inversible dans un voisinage de 0 pour X suffisamment proche de 0 et donc $C(X,U)$ est un voisinage de X dans $\mathfrak{g}$ si X est suffisamment proche de 0. Quitte à restreindre encore U, on peut supposer que tel est le cas pour tout

$X \in U$. Soit $\mathcal{O}(X,U)$ un ouvert contenant X et contenu dans $C(X,U)$. L'ensemble $\overline{W} := C(\overline{U},\overline{U}) = \exp \overline{U} \exp \overline{U}$ est recouvert par les $\mathcal{O}(X,U)$, $X \in \overline{W}$. Comme $\overline{W}$ est l'image d'un compact par une application continue, c'est un compact, et nous pouvons donc extraine un nombre fini d'ouverts $\mathcal{O}(X_i,U)$, $i = 1,\ldots,k$, recouvrant $\overline{W}$. Écrivons $\exp X_i = a_i a_i'$ avec $a_i, a_i' \in \exp \overline{U}$ pour chaque i, et prenons l'image par exp des inclusions

$$\overline{W} \subset \bigcup_{i=1,\ldots,k} \mathcal{O}(X_i,U) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,k} C(X_i,U),$$

pour obtenir

$$\exp \overline{U} \exp \overline{U} \subset \bigcup_{i=1,\ldots,k} a_i a_i' \exp U\,.$$

L'ensemble des produits finis d'éléments parmi les a_i, a_i', avec répétitions, est dénombrable. Notons-le $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. On obtient facilement par récurrence sur k que

$$(\exp \overline{U})^k \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} b_j \exp \overline{U},$$

où $(\exp \overline{U})^k$ est l'ensemble des produits de k éléments dans $\exp \overline{U}$. Ceci montre que

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} b_j \exp \overline{U}, \tag{5.1}$$

où $b_j \in \Gamma(\mathfrak{g})$.

Appliquons maintenant le lemme de recouvrement de Baire au groupe $\Gamma(\mathfrak{g})$ pour montrer que l'une des parties $b_j \exp \overline{U}$ est voisinage de l'un de ses points, disons a_0. Prenons un ouvert $U' \subset U$ de $\mathrm{Lie}\,(\Gamma(\mathfrak{g}))$ suffisamment petit de sorte que $\exp U'$ soit ouvert dans $\Gamma(\mathfrak{g})$ et que $a_0 \exp U' \subset b_j \exp \overline{U}$. Réécrivons ceci :

$$\exp U' \subset c \exp \overline{U}$$

avec $c = a_0^{-1} b_j$. Pour $X' \in U'$, il existe $X \in \overline{U}$ tel que $\exp X' = c \exp X$. Comme X est suffisamment proche de 0, il est donné par

$$X = \log(c^{-1} \exp X')\,.$$

En remplaçant X' par tX', $t \in [0,1]$, on écrit

$$\exp tX' = c \exp X(t),$$

avec $X(t) \in \overline{U}$ qui dépend différentiablement de t. En $t = 0$, on trouve $c = \exp(-X(0))$ et donc

$$\exp tX' = \exp(-X(0)) \exp(X(t)) .$$

En différentiant en $t = 0$, on obtient

$$X' = \frac{\mathrm{Id} - \exp(-\mathrm{ad}(X(0)))}{\mathrm{ad}(X(0))} X'(0)$$

qui est dans $\mathfrak{g}$ car $X(0)$, $X'(0)$ sont dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Donc le voisinage U' de 0 dans Lie $(\Gamma(\mathfrak{g}))$ est dans $\mathfrak{g}$, et donc Lie $(\Gamma(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{g}$. □

La correspondance de Lie fournit un dictionnaire entre les groupes linéaires connexes et les algèbre de Lie de matrices. Nous allons donner quelques exemples.

Corollaire 5.5. *Soit G un groupe linéaire connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors G est abélien si et seulement si $\mathfrak{g}$ est abélienne (i.e., le crochet de Lie est toujours nul).*

Proposition 5.6. *Tout groupe linéaire connexe abélien est isomorphe à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^k$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et un certain $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Soient A un tel groupe et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. Comme $\mathfrak{a}$ est abélienne, l'exponentielle est un morphisme de groupes, et donc $\exp \mathfrak{a}$ est un sous-groupe de A. Comme A est connexe, $A = \exp \mathfrak{a}$. Soit $L = \ker \exp$. C'est un sous-groupe discret de $\mathfrak{a}$, puisque l'exponentielle est un dfféomorphisme au voisinage de 0. Le lemme qui suit donne la forme d'un tel sous-groupe discret, ce qui permet de terminer aisément la démonstration. □

Lemme 5.7. *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie n et L un sous-groupe discret de V. Alors il existe une base $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de V et un entier $k \leqslant n$ tel que*

$$L = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2 + \cdots + \mathbb{Z}u_k .$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. On considère un sous-espace W de V tel que $L \cap W = \mathbb{Z}u_1 + \cdot + \mathbb{Z}u_m$ pour un certain entier $m \leqslant n$, où $u_1, \ldots, u_m$ est une famille libre. Ceci existe car on peut commencer avec $W = \{0\}$ et $m = 0$. Supposons que L ne soit pas inclus dans W et soit $u \in L$, $u \neq W$. Considérons l'ensemble des points de V de la forme

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \alpha u, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 .$$

C'est un ensemble fermé borné de V qui intersecte L. Il ne contient qu'un nombre fini d'éléments du groupe discret L. Parmi ces éléments, choisissons-en un tel que le coefficient α soit minimal, non nul et appelons-le u_{m+1}. Alors tout élément de L dans $W \oplus \mathbb{R}u = W \oplus \mathbb{R}u - m + 1$ a pour composante sur $\mathbb{R}u_{m+1}$ un multiple entier de u_{m+1}. En effet, supposons le contraire : soit

$$l = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m + \beta u_{m+1} \in L$$

avec $\beta = k + \nu$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 < \nu < 1$. On peut réécrire ceci sous la forme

$$l = \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m + (k + \nu)\alpha u,$$

où α est un entier, et en ajoutant un élément bien choisi de L, on trouve $l' \in L$ de la forme

$$l' = \gamma_1' u_1 + \cdots + \gamma_m' u_m + \nu \alpha u \in L,$$

avec $0 \leqslant \gamma_i' \leqslant 1$. Comme $0 \leqslant \nu\alpha < \alpha$, ceci contredit la minimalité de α. Tout ceci montre que

$$L \cap (W \oplus \mathbb{R}u) = (L \cap W) \oplus \mathbb{Z}u - m + 1 .$$

On répète l'argument jusquà obtenir $u_1, \ldots, u_k$ comme dans le lemme. $\square$

6 Homomorphismes de groupes linéaires. Revêtements

La correspondance de Lie $G \mapsto \mathrm{Lie}\,(G)$ est fonctorielle, i.e., qu'elle se prolonge aux morphismes. Les morphismes entre groupes linéaires sont ici toujours supposés différentiables (pour la structure de variété différentielle donnée par la topologie intrinsèque). Plus précisément :

Théorème 6.1. *Soit $f : G \to H$ un morphisme (différentiable) entre groupes linéaires. Soit $\phi = df_{\mathrm{Id}}$ la différentielle de f en* Id. *Alors*

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie et

$$f(\exp X) = \exp(\phi(X)), \quad X \in \mathfrak{g}\,.$$

Démonstration. Montrons que $f(\exp X) = \exp(\phi(X))$. Posons $a(s) = f(\exp(sX))$. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}a(s) &= \frac{d}{dt}f(\exp((s+t)X))_{t=0} = \frac{d}{dt}f(\exp(sX)\exp(tX))_{t=0}\\ &= f(\exp(sX))\frac{d}{dt}f(\exp(tX))_{t=0} = a(s)\phi(X)\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que $a(s)$ vérifie l'équation différentielle $a'(s) = a(s)\phi(X)$, avec condition initial $a(0) = \mathrm{Id}$. Donc $a(s) = \exp(s\phi(X))$ et en particulier $f(\exp X) = \exp(\phi(X))$.

Montrons que ϕ est un morphisme d'algèbre de Lie, i.e., pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]\,.$$

On part de l'équation

$$f(\exp(tX)\exp(sX)\exp(-tX)) = \exp(t\phi(X))\exp(s\phi(X))\exp(-t\phi(X))$$

que l'on dérive par rapport à s et que l'on évalue en $s = 0$:

$$\phi(\exp(tX)Y\exp(tX)) = \exp(t\phi(X))\phi(Y)\exp(-t\phi(X))\,.$$

On dérive maintenant par rapport à t et on évalue en $t = 0$:

$$\phi([X,Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X) = [\phi(X), \phi(Y)]\,.$$

□

Corollaire 6.2. *Soit $f : G \to H$ un morphisme (différentiable) entre groupes linéaires. Soit $\phi = df_{\mathrm{Id}}$ la différentielle de f en* Id. *Alors*

(i) $\ker(\phi) = \mathrm{Lie}(\ker(f))$,

(ii) *si G n'a qu'un nombre au plus dénombrable de composantes connexes,* $\mathrm{im}\,(\phi) = \mathrm{Lie}\,(\mathrm{im}\,(f))$.

Démonstration. (i). On a $X \in \mathrm{Lie}\,(\ker\,(f))$ si et seulement si $f(\exp(tX)) = \mathrm{Id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or $f(\exp(tX)) = \exp(t\phi(X))$, donc $X \in \mathrm{Lie}\,(\ker\,(f))$ se et seulement si $\exp(t\phi(X)) = \mathrm{Id}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, i.e., $\phi(X) = 0$.

(ii). Comme $f(\exp(tX)) = \exp(t\phi(X))$, on a $\mathrm{im}\,(\phi) \subset \mathrm{Lie}\,(\mathrm{im}\,(f))$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit de voir que $\Gamma(\mathrm{im}\,(\phi))$ contient un ouvert de $\mathrm{im}\,(f)$. Écrivons le composante neutre $G_0 = \bigcup_j A_j$ comme dans l'équation (5.1). Comme G n'a qu'un nombre dénombrable de composantes connexes, on peut écrire

$$G = \bigcup_k g_k G_0 = \bigcup_{k,j} g_k A_j\,.$$

Ainsi

$$f(G) = \bigcup_{k,j} f(g_k A_j)\,.$$

Comme les parties A_j sont compactes, chaque $f(g_k A_j)$ est compact, donc fermé, et d'après le lemme de recouvrement de Baire, l'un d'eux contient un ouvert de $\mathrm{im}\,(f)$. □

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. On dit que f est localement surjective (resp. bijective), si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage V de $f(x)$ dans Y tels que la restriction de f à U soit une surjection (resp. bijection) de U dans V.

Corollaire 6.3. *Soit $f : G \to H$ un morphisme (différentiable) entre groupes linéaires. Soit $\phi = df_{\mathrm{Id}}$ la différentielle de f en* Id*. Alors*

(i) *f est localement injective (en tout point $g \in G$, il existe un voisinage U de g dans G tel que $f_{|U}$ soit injective) si et seulement si ϕ est injective.*

(ii) *si G n'a qu'un nombre au plus dénombrable de composantes connexes et si H est connexe, f est localement surjective si et seulement si ϕ est surjective.*

(iii) *f est localement bijective si et seulement si ϕ est bijective. Dans ce cas,* $\ker\,(f)$ *est un sous-groupe discret de G.*

Un morphisme différentiable localement bijectif $p : \widetilde{G} \to G$ entre groupes linéaires connexes est appelé un **revêtement** de G. Le noyau d'un tel morphisme est discret dans $\widetilde{G}$ et p est surjectif. Réciproquement, un morphisme différentiable surjectif à noyau discret entre deux groupes linéaires connexes est localement bijectf.

Le noyau de p est nécessairement contenu dans le centre de $\widetilde{G}$. En effet, tout élément $g \in \widetilde{G}$ peut être relié à Id par un chemin continu $t \mapsto a(t)$. Pour tout $z \in \ker(p)$, on a $a(t)za(t)^{-1} \in \ker(p)$ et, en $t = 0$, $a(0)za(0)^{-1} = z$. La fonction $t \mapsto a(t)za(t)^{-1}$ est continue, à valeurs dans un sous-groupe discret de $\widetilde{G}$, donc constante, ce qui prouve l'assertion. Réciproquement, pour tout sous-groupe central discret Z dans $\widetilde{G}$, la suite exacte

$$1 \to Z \to \widetilde{G} \to \widetilde{G}/Z \to 1$$

fait apparaître $\widetilde{G}$ comme revêtement de $\widetilde{G}/Z$ (il faut munir $\widetilde{G}/Z$ de la topologie quotient et montrer que c'est bien un groupe linéaire).

Remarquons que cette définition de revêtement correspond à celle au sens de la topologie.

Soient G et H deux groupes linéaires respectivement d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Supposons donné un morphisme d'algèbres de Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} .$$

Pouvons-nous relever ϕ en un morphisme de groupes linéaires

$$f : G \to H$$

de telle sorte que $df_{\mathrm{Id}} = \phi$?

L'exemple de $G = \mathbb{C}^\times$, $H = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathbb{C}$ et $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ montre que tel n'est pas le cas. En effet, supposons que f existe. Alors $f(e^z) = \exp(\phi(z)) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Mais il faut prendre garde au fait que dans le membre de droite de cette équation, l'exponentielle n'est pas l'exponentielle usuelle des nombres complexes. Pour bien comprendre ceci, il faut revenir aux définitions, qui demandent de réaliser $(\mathbb{C}^\times, \times)$ et $(\mathbb{C}, +)$ comme des groupes linéaires. Or, si $(\mathbb{C}^\times, \times) = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ est trivialement linéaire, il faut être plus subtil pour $(\mathbb{C}, +)$. Ce groupe se plonge dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ par

$$z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et donc son algèbre de Lie $\mathbb{C}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc il faut interpréter la formule ci-dessus comme

$$f(e^z) = \exp z = z\,.$$

Or, on sait que la fonction $z \mapsto e^z$ n'admet pas d'inverse global sur $\mathbb{C}^\times$.

Donc si G et H sont donnés comme ci-dessus, un morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ne se relève pas forcément en un morphisme de groupes linéaires. Mais il existe toujours un revêtement de G qui va permettre ce relèvement.

Théorème 6.4. *Soient G et H deux groupes linéaires connexes et $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbres de Lie. Alors il existe un revêtement $p : \widetilde{G} \to G$ tel que ϕ se relève en un morphisme de groupes*

$$f : \widetilde{G} \to H\,.$$

Démonstration. Dans l'énoncé ci-dessus, il faut comprendre que les algèbres de Lie de G et $\widetilde{G}$ sont identifiées par l'isomorphisme dp_{Id}.

Posons

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \mid Y = \phi(X)\}\,.$$

C'est le graphe de ϕ, et c'est une algèbre de Lie de matrices. Soit $\widetilde{G}$ le groupe lui correspondant par la correspondance de Lie : c'est un sous-groupe de $G \times H$. Soient p la restriction à $\widetilde{G}$ de la projection de $G \times H$ sur G et $f : \widetilde{G} \to H$ la restriction à $\widetilde{G}$ de la projection de $G \times H$ sur H. On a

$$dp_{\mathrm{Id}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}, \quad (X, \phi(X)) \mapsto X$$

qui est un isomorphisme, ce qui montre que $p : \widetilde{G} \to G$ est un revêtement.

D'autre part,

$$df_{\mathrm{Id}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{h}, \quad (X, \phi(X)) \mapsto \phi(X),$$

ce qui montre que f est un relèvement de ϕ. $\square$

Exemple 6.1. Reprenons l'exemple $G = \mathbb{C}^\times$ et $H = \mathbb{C}$. Le morphisme d'algèbres de Lie
$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z$$
se relève en un morphisme de $\widetilde{G} \to \mathbb{C}$, où
$$\widetilde{G} = \{M(z) := \begin{pmatrix} e^z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}\}\,.$$
En effet $p : \widetilde{G} \to \mathbb{C}^\times$, $M(z) \mapsto e^z$, est un isomorphisme local et $f : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$, $M(z) \mapsto z$, relève ϕ.

On dit qu'un groupe linéaire connexe G est **simplement connexe** lorsqu'il vérifie la condition suivante :

> tout morphisme d'algèbres de Lie entre son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une algèbre de Lie de matrices $\mathfrak{h}$ se relève en un morphisme de groupes linéaires entre G et le groupe linéaire H donné par la correspondance de Lie.

Un groupe est simplement connexe en ce sens s'il est simplement connexe au sens de la topologie (admis).

Exemples 6.1. Les groupes $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ sont simplement connexes, ainsi que les groupes compacts $\mathrm{SU}(n)$. Les groupes $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ ne le sont pas, ni les groupes compacts $\mathrm{SO}(n)$. Il existe un revêtement d'ordre 2 de $\mathrm{SO}(n)$ simplement connexe que l'on note $\mathrm{Spin}(n)$. Lorsque $n = 3$, $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$.

Une question naturelle est de savoir si tout groupe linéaire connexe G admet un revêtement simplement connexe $\widetilde{G}$. En topologie, tout espace connexe "raisonnable" (par exemple, une variété différentiable) admet un revêtement simplement connexe (appelé revêtement universel).

Un groupe de Lie est une variété différentiable, munie d'une structure de groupe telle que le produit et le passage à l'inverse soient $\mathcal{C}^\infty$. Le revêtement universel d'un groupe de Lie connexe peut être muni d'une structure de groupe de Lie.

Un groupe linéaire connexe est un groupe de Lie connexe, mais son revêtement universel n'est pas nécessairement linéaire. Ainsi, par exemple, le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ admet un revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ qui est un groupe de Lie non linéaire. Le noyau de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

7 Représentations de dimension finie de groupes linéaires connexes

Soit G un groupe linéaire connexe. Une représentation de dimension finie (π, V) de G est donnée par un morphisme de groupes linéaires :

$$\pi : G \to \mathrm{GL}(V)\,.$$

La différentielle de ce morphisme est un morphisme d'algèbres de Lie :

$$d\pi_{\mathrm{Id}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)\,.$$

Le résultat suivant est immédiat et montre que l'étude des représentations de dimension finie de G se ramène dans une large mesure à l'étude des représentations de son algèbre de Lie.

Proposition 7.1. *Un sous-espace W de V est stable sous l'action de G si et seulement s'il est stable sous l'action de $\mathfrak{g}$.*

Ainsi une représentation irréductible de dimension finie de G donne une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. Si l'on cherche par exemple à déterminer toutes les représentations irréductibles de dimension finie de G, on commencera par le problème, en pratique plus simple, de déterminer toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Bien sûr, si G n'est pas simplement connexe, une représentation de $\mathfrak{g}$ ne se relève pas forcément en une représentation de G. La stratégie ici sera alors la suivante. On essaie d'identifier le revêtement universel $\widetilde{G}$ de G. Toute représentation de $\mathfrak{g}$ se relève en une représentation de $\widetilde{G}$. Une telle représentation définit aussi une représentation de G si et seulement si elle est triviale sur le noyau du revêtement.

Une représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),$$

où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie. Or $\mathfrak{g}$ est une espace vectoriel réel et ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire. Il est alors avantageux de remplacer $\mathfrak{g}$ par sa **complexification**.

Définition 7.1. Soit E un espace vectoriel réel. La complexification de E, notée $E_{\mathbb{C}}$, est l'espace vectoriel complexe

$$E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ d'un élément $v \otimes z \in E_{\mathbb{C}}$ est donnée par

$$\lambda(v \otimes z) = v \otimes \lambda z\,.$$

En pratique, il suffit de comprendre que si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E (sur $\mathbb{R}$), alors c'est aussi une base de $E_{\mathbb{C}}$ (sur $\mathbb{C}$). Si $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, alors $\dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = n$. Remarquons que tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est naturellement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, mais que la complexification n'est pas l'inverse de cette opération. Ainsi la complexification de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ en tant qu'espace vectoriel réel.

Proposition 7.2. *Toute application $\mathbb{R}$-linéaire*

$$\phi : E \to V,$$

où V est un espace vectoriel complexe, se prolonge naturellement en une application $\mathbb{C}$-linéaire (encore notée ϕ)

$$\phi : E_{\mathbb{C}} \to V\,.$$

Réciproquement, toute application $\mathbb{C}$-linéaire $\phi : E_{\mathbb{C}} \to V$ est entièrement déterminée par sa restriction à $E \simeq E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \subset E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = E_{\mathbb{C}}$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire.

En résumé, il est équivalent d'étudier les représentations $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathfrak{g}$ dans des espaces vectoriels complexes ou les représentations $\mathbb{C}$-linéaires de sa complexification $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

8 Représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Une base (sur $\mathbb{C}$) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'on a les relations de commutations suivantes :

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H\,.$$

Soit $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de dimension finie. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit V_λ le sous espace propre (éventuellement nul) de $\rho(H)$ pour la valeur propre λ. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, si V est non nul, il existe un V_λ non nul.

Lemme 8.1.

$$\rho(E)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}, \quad \rho(F)(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}\,.$$

Démonstration. Soit $v \in V_\lambda$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \rho(H)(\rho(E)v) & = & \rho(E)(\rho(H)v) + [\rho(H), \rho(E)]v \\ & = & \lambda\rho(E)v + \rho([H, E])v \\ & = & \lambda\rho(E)v + 2\rho(E)v = (\lambda + 2)\rho(E)v \end{array}$$

ce qui montre la première inclusion. La deuxième s'obtient de la même manière. □

Comme V est de dimension finie, il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces propres V_λ non nuls. Si V est non nul, il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $V_{\lambda_0} \neq \{0\}$ et $V_{\lambda_0+2} = \{0\}$. Soit $0 \neq v_0 \in V_{\lambda_0}$. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \rho(F)^k v_0\,.$$

Alors $v_k \in V_{\lambda_0-2k}$.

On a par exemple $v_1 = \rho(F)v_0$ et

$$\begin{array}{rcl} \rho(E)v_1 & = & \rho(E)(\rho(F)v_0) \\ & = & \rho(F)(\rho(E)v_0) + [\rho(E), \rho(F)]v_0 \\ & = & 0 + \rho([E, F])v_0 = \rho(H)v_0 \\ & = & \lambda_0 v_0\,. \end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} \rho(E)v_2 & = & \rho(E)(\rho(F)v_1) \\ & = & \rho(F)(\rho(E)v_1) + [\rho(E), \rho(F)]v_1 \\ & = & \lambda_0\rho(F)v_0 + \rho(H)v_1 \\ & = & \lambda_0 v_1 + (\lambda_0 - 2)v_1 = (2\lambda_0 - 2)v_1\,. \end{array}$$

Tentons d'avancer une hypothèse de récurrence :

$$\rho(E)v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}\,. \tag{H}$$

Elle est satisfaite pour $k = 1, 2$ et, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient, pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rcl} \rho(E)v_{k+1} & = & \rho(E)(\rho(F)v_k) \\ & = & \rho(F)(\rho(E)v_k) + [\rho(E), \rho(F)]v_k \\ & = & k(\lambda_0 - k + 1)v_k + (\lambda_0 - 2k)v_k \\ & = & (k+1)(\lambda_0 - 1)v_k, \end{array}$$

D'où (H).

Tant que les vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_j$ sont non nuls, ils sont linéairement indépendants, et donc, comme la dimension de V est finie, il existe un plus petit entier n non nul tel que $v_{n+1} = 0$. En particulier $v_n \neq 0$. On a alors

$$0 = \rho(E)v_{n+1} = (n+1)(\lambda_0 - n)v_n,$$

d'où $\lambda_0 = n$.

D'autre part, $v_0, v_1, \ldots, v_n$ engendre un sous-espace de V stable sous l'action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Si l'on suppose que (ρ, V) est irréductible, on voit alors que $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ est une base de V. En particulier $\dim_{\mathbb{C}} V = n + 1$.

Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}$, et si l'on fixe une base $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, alors on définit une représentation $(\rho, \mathbb{C}^{n+1})$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ par

$$\rho(H)v_k = (n - 2k)v_k, \quad \rho(E)v_k = k(n - k + 1)v_{k-1}, \quad \rho(F)v_k = v_{k+1},$$

pour tout $k = 0, \ldots, n$. avec les conventions $v_{-1} = v_{n+1} = 0$. On voit facilement qu'elle est irréductible : tout sous-espace invariant W contient un vecteur propre non nul pour $\rho(H)$, qui est donc, à un scalaire non nul près, l'un des v_i.

Ceci donne la classification des représentations $\mathbb{C}$-linéaires irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Notons $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$ la représentation irréductible de dimension $n+1$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ définie ci-dessus. Toute représentation irréductible $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimension $n+1$ est isomorphe à $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$.

9 Le revêtement $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$

Rappelons que $\mathrm{SU}(2)$ est le groupe des matrices :

$$\mathrm{SU}(2) = \{a \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{a}a = \mathrm{Id}, \det(a) = 1\},$$

et que son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} + X = 0, \operatorname{tr} X = 0\}, .$$

Plus explicitement, on a donc

$$\mathrm{SU}(2) = \{\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\},$$

$$\mathfrak{su}(2) = \{\begin{pmatrix} iz & -y + iz \\ y + ix & -iz \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

On voit donc que, topologiquement, SU(2) est la sphère unité dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. En particulier :

Proposition 9.1. SU(2) *est un groupe linéaire connexe, simplement connexe.*

Passons maintenant à SO(3). C'est le groupe de matrices :

$$\mathrm{SO}(3) = \{a \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid {}^t aa = \mathrm{Id}, \det(a) = 1\},$$

dont l'algèbre de Lie est

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &= \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & x \\ -y & -x & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Une base de $\mathfrak{su}(2)$ est donné par :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

et l'on a les relations de commutation suivantes :

$$[I, J] = 2K, \quad [J, K] = 2I, \quad [K, I] = 2J.$$

Munissons $\mathfrak{su}(2)$ de la forme bilinéaire κ symétrique définie par :

$$\kappa(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{su}(2).$$

Les relations de commutation ci-dessus donnent les matrices de $\mathrm{ad}(I)$, $\mathrm{ad}(J)$ et $\mathrm{ad}(K)$ dans la base (I, J, K) : on caculer alors facilement que

$$\kappa(I,I) = \kappa(J,J) = \kappa(K,K) = -8, \quad \kappa(I,J) = \kappa(J,K) = \kappa(K,I) = 0\,.$$

La base (I, J, K) de $\mathfrak{su}(2)$ est donc orthogonale et l'on constate que la forme κ est définie négative. Si l'on préfère travailler avec un produit scalaire (défini positif) et une base orthonormale, on peut remplacer κ par $-\frac{1}{8}\kappa$. L'espace euclidien $(\mathfrak{su}(2), -\frac{1}{8}\kappa)$ est alors, par le choix de la base (I, J, K), isomorphe à $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

Montrons que la forme κ est invariante par l'action adjointe de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathfrak{su}(2)$. Il nous faut montrer que

$$\kappa(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = \kappa(X,Y), \quad g \in \mathrm{SU}(2), X, Y \in \mathfrak{su}(2),$$

i.e.,

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(gXg^{-1})\mathrm{ad}(gYg^{-1})) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))\,.$$

Pour tout $Z \in \mathfrak{su}(2)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(gXg^{-1})\mathrm{ad}(gYg^{-1})Z &= [gXg^{-1}, [gYg^{-1}, Z]] \\
&= \mathrm{Ad}(g)(XY(g^{-1}Zg) - (g^{-1}Zg)Y - Y(g^{-1}Zg)X \\
&\qquad +(g^{-1}Zg)YX) \\
&= \mathrm{Ad}(g)(X[Y, \mathrm{Ad}(g^{-1})Z] - [Y, \mathrm{Ad}(g^{-1})Z]X) \\
&= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(Z)\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(gXg^{-1}) \circ \mathrm{ad}(gYg^{-1})) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))\,.$$

Ainsi Ad est un morphisme du groupe $\mathrm{SU}(2)$ dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathfrak{su}(2), \kappa) \simeq \mathrm{O}(3)$, et de plus, comme $\mathrm{SU}(2)$ est connexe, le déterminant de $\mathrm{Ad}(g)$, $g \in \mathrm{SU}(2)$, est toujours 1. Donc, en fait, on obtient un morphisme

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2), \kappa) \simeq \mathrm{SO}(3)\,.$$

La différentielle de ce morphisme est le morphisme d'algèbres de Lie

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2), \kappa) \simeq \mathfrak{so}(3)\,.$$

Un calcul explicite dans la base (I, J, K) de $\mathfrak{su}(2)$ montre que

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} iz & -y+ix \\ y+ix & -iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2z & 2y \\ 2z & 0 & -2x \\ -2y & 2x & 0 \end{pmatrix},$$

et donc ad réalise un isomorphisme entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$. Ainsi Ad est un isomorphisme local entre SU(2) et SO(3). Comme SO(3) est connexe, Ad est surjectif. Calculons maintenant son noyau. On cherche les $g \in \mathrm{SU}(2)$ tels que

$$\mathrm{Ad}(g)I = I, \quad \mathrm{Ad}(g)J = J, \quad \mathrm{Ad}(g)K = K\,.$$

Un calcul explicite montre que g est une matrice scalaire. La condition $\det(g) = 1$ impose alors que $g = \pm\mathrm{Id}$. Résumons

Proposition 9.2. *La suite courte suivante est exacte :*

$$1 \to \{\pm\mathrm{Id}\} \to \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \to 1\,.$$

Le groupe SU(2) *est un revêtement de* SO(3) *(d'ordre* 2*).*

10 Représentations irréductibles de SU(2) et SO(3)

Comme nous l'avons expliquer précédemment, pour étudier les représentations de dimension finie de SU(2) et SO(3), nous allons étudier celles de leurs algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. Commençons par identifier la complexification de $\mathfrak{su}(2)$:

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

Comme (I, J, K) est une base de $\mathfrak{su}(2)$ sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} &= \mathbb{C}I \oplus \mathbb{C}J \oplus \mathbb{C}K \\ &= \{\begin{pmatrix} iz & -y+ix \\ y+ix & -iz \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})\,. \end{aligned}$$

Il est donc équivalent d'étudier les représentations $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathfrak{su}(2)$ dans les espaces vectoriels complexes et les représentations $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

On exprime I, J, K dans la base (H, E, F) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et on en déduit l'action de I, J, K dans $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$.

Nous allons montrer que les représentations $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$ se remontent en des représentations du groupe $\mathrm{SU}(2)$. Pour cela, nous allons commencer par trouver une autre réalisation de ces représentations.

Soit $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à deux variables. Posons $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $i = 1, 2$, et

$$D_E = -z_2\partial_1, \quad D_F = -z_1\partial_2, \quad D_H = z_2\partial_2 - z_1\partial_1 .$$

Alors D_E, D_F, D_H sont des opérateurs différentiels (linéaires à coefficients constants) qui agissent sur $\mathbb{C}[z_1, z_2]$. On vérifie par le calcul qu'ils satisfont les relations de commutation :

$$[D_H, D_E] = 2D_E, \quad [D_H, D_F] = -2D_F, \quad [D_E, D_F] = D_H .$$

Ainsi

$$E \mapsto D_E, \quad F \mapsto D_F, \quad H \mapsto D_H$$

définit une représentation D de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[z_1, z_2]$.

Une base de $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ est donnée par les monômes $z_1^k z_2^{n-k}$, avec k, n entiers naturels tels que $k \leqslant n$. On calcule

$$\begin{aligned} &D_H(z_1^k z_2^{n-k}) = (n-2k) z_1^k z_2^{n-k}, \quad D_F(z_1^k z_2^{n-k}) = -(n-k) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}, \\ &D_E(z_1^k z_2^{n-k}) = -k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1}, \end{aligned}$$

avec la convention $z_i^{-1} = 0$.

Ceci montre que l'espace $\mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ des polynômes homogènes de degré n fixé (qui est de dimension $n+1$) est stable sous l'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. La représentation $(D, \mathbb{C}[z_1, z_2]_n)$ est équivalente à $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$ comme on le voit en normalisant convenablement la base $(z_1^k z_2^{n-k})_{k=0,\ldots,n}$:

$$v_k = (-1)^k \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{(n-k)!} .$$

On peut, en utilisant les écritures de I, J, K dans la base (H, E, F), exprimer D_I, D_J, D_K et l'action de I, J, K sur les monômes $z_1^k z_2^{n-k}$.

Nous allons maintenant montrer que l'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ est la différentielle d'une représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans ce même espace.

En effet, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ agit naturellement sur $\mathbb{C}^2$, et donc sur $\mathbb{C}[z_1,z_2]$, par

$$(\rho(g)P)(z_1,z_2) = P(g^{-1}(z_1,z_2))\,.$$

De manière explicite, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$, est un élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, son inverse $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et donc

$$g^{-1}(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2)\,.$$

Ainsi

$$(\rho(g)P)(z_1,z_2) = P(dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2)\,.$$

Il est clair que cette action préserve les polynômes homogènes de degré n. On en déduit donc une représentation $(\rho, \mathbb{C}[z_1,z_2]_n)$. Nous allons maintenant calculer sa différentielle.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (i.e., $\delta = -\alpha$) et posons

$$g(t) = \exp(X) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

On a $g(0) = \mathrm{Id}$ et $g'(0) = X$, i.e., $a'(0) = \alpha$,... On peut alors calculer la différentielle de ρ :

$$\begin{aligned}
(d\rho(X)P)(z_1,z_2) &= \frac{d}{dt}((\rho(g(t))P)(z_1,z_2))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(P(d(t)z_1 - b(t)z_2, -c(t)z_1 + a(t)z_2))_{t=0} \\
&= (\delta z_1 - \beta z_2)(\partial_1 P)(z_1,z_2) + (-\gamma z_1 + \alpha z_2)(\partial_2 P)(z_1,z_2)\,.
\end{aligned}$$

En particulier on trouve :

$$d\rho(H) = -z_1\partial_1 + z_2\partial_2, \quad d\rho(E) = -z_2\partial_1, \quad d\rho(F) = -z_1\partial_2\,.$$

Nous retrouvons ainsi la représentation $(D, \mathbb{C}[z_1,z_2])$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, équivalente à $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$.

Restreignons maintenant la représentation $(\rho, \mathbb{C}[z_1,z_2]_n)$ à $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Notons (π_n, V_n) cette représentation. Nous avons montré que toute représentation irréductible de dimension $n+1$ de $\mathrm{SU}(2)$ est équivalente à $(\rho_n, \mathbb{C}^{n+1})$.

Les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SO}(3)$ sont celles obtenues à partir de celles de $\mathrm{SU}(2)$ triviales en $-\mathrm{Id} \in \mathrm{SU}(2)$. Or $-\mathrm{Id}$ agit sur un polynôme P par

$$(\rho(-\mathrm{Id})P)(z_1, z_2) = P(-z_1, -z_2)\,.$$

Ainsi les représentations de $\mathrm{SU}(2)$ triviales en $-\mathrm{Id}$ sont les (π_n, V_n) pour n pair.

11 Représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Le travail fait dans le paragraphe précédent permet aussi d'obtenir les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Remarquons tout d'abord que ce groupe est non compact. Néanmoins, il est connexe et ses représentations de dimension finie donnent par différentiation de représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Celles-ci correspondent à leur tour à des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. On sait que l'irréducibilité est préservée par ces correspondances. Les représentations irréductibles $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ont été déterminées plus haut. Il reste à voir si elles se remontent en des représentations du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

La même méthode que celle utilisée pour $\mathrm{SU}(2)$ marche, car on vu qu'elles se remontent en des représentations de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, que l'on peut ensuite restreindre à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On voit donc que les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sont en bijection avec les représentations irréductibles (de dimension finie) de $\mathrm{SU}(2)$ et qu'elles sont dans les deux cas obtenues par restriction des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, dont la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Lorsqu'un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un espace vectoriel complexe V est tel que $E_{\mathbb{C}} \simeq V$, on dit que E est une forme réelle de V. Ce qui se passe ici est que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}(2)$ sont deux formes réelles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. On peut étendre cette notion (en utilisant le formalisme des groupes algébriques) et dire que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SU}(2)$ sont deux formes réelles de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Une autre conséquence de ceci est que les représentations de dimension finie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sont complètement réductibles. Ceci n'est pas évident car

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ n'étant pas compact, il n'existe pas de produit scalaire invariant sur une représentation de dimension finie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui n'est pas la triviale.

L'astuce qui consiste à relier la théorie des représentations de dimension finie d'un groupe linéaire connexe G à celle d'un groupe compact K, ces deux groupes étant des formes réelles d'un même groupe complexe $\mathbb{G}$ est due à H. Weyl et est connue sous le terme d'**unitarian trick**. Par exemple, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont des formes réelles de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(p, q)$ et $\mathrm{SO}(p+q)$ sont des formes réelles de $\mathrm{SO}(p+q, \mathbb{C})$...

Tout ceci marche pour les représentations de dimension finie. Par contre, on sait que si G est un groupe linéaire (connexe) non compact, il possède des représentations irréductibles de dimension infinie. Par exemple, c'est le cas de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Étudier ces représentations est là où l'histoire commence à se compliquer.