Université de Strasbourg
Licence Math-Info

Sofiane Souaifi
Algèbre S3

# Feuille 1 : opérations sur les polynômes

**Exercice 1.** — On pose

$$A = 2X^3 - X + 3, \quad B = -X^2 - X + 1, \quad C = -X^3 + X^2 - 4.$$

Calculez les polynômes $A^2$, $B^2$, $C^2$, $AB + BC + CA$ et $ABC$.

**Exercice 2.** — Calculez les polynômes $A^2$, $B^2$, $C^2$, $AB$, $BC$, $CA$, $(A + B + C)^2$ dans chacun des cas suivants :

(a) $A = X^2 - 3X$, $B = X^3 - X - 3$, $C = -X^4 + X^2$.

(b) $A = \frac{1}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}X^2 + X + 1$, $C = X^2 + \frac{2}{3}X + 1$.

(c) $A = X^3 - (i + 1)X - i + 1$, $B = \frac{1}{2}i - X^2$, $C = X^4 - iX^2 + 3i$.

**Exercice 3.** — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Prouvez que dans $\mathbb{K}[X]$ on a $P \cdot Q = 0 \implies P = 0$ ou $Q = 0$.
En déduire que si on a $AB = AC$ avec $A$ non-nul, alors $B = C$.

**Exercice 4.** — Divisez le polynôme $A$ par le polynôme $B$ : trouvez le reste $R$ et le quotient $Q$, et vérifier que l'on a $A = BQ + R$.

(a) $A = X^2 - X + 2$, $B = X - 1$.

(b) $A = X^2 - X$, $B = X^3 + 4X^2 - 3$.

(c) $A = X^4 - X^3 - 2X^2 + 2$, $B = 2X^2 + 2X - 1$.

(d) $A = 2X^6 - 3X^4 - X^2 + 2$, $B = X^3 - X + 1$.

(e) $A = iX^5 - (1 + 2i)X^3 - 1$, $B = \frac{1}{2}X^2 - (1 + 1)$.

**Exercice 5.** — Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre, $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = (\sin(t)X + \cos(t))^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X^2 + 1)$ .

**Exercice 6.** — Divisez en puissances croissantes le polynôme $A$ par le polynôme $B$ pour $A$ et $B$ donnés dans l'exercice 4.