Université de Strasbourg
Licence Math-Info

Sofiane Souaifi
Algèbre S3

Feuille 2 : pgcd et théorème de Bézout

Exercice 1. — Trouvez le pgcd des deux polynômes :

$$A = X^4 - 3X^3 + 2X^2, \quad B = X^3 - X^2 - 4X + 4.$$

Exercice 2. — Montrez que les deux polynômes

$$A = 2X^6 - 3X^4 - X^2 + 2, \quad B = X^3 - X + 1$$

sont premiers entre eux. Trouvez deux polynômes U et V tels que l'on ait $1 = AU + BV$.

Exercice 3. — Montrez que les deux polynômes

$$A = X^5 + X^4 + X^3 + 1, \quad B = X^2 + 5$$

sont premiers entre eux et trouvez deux polynômes U et V tels que l'on ait $1 = AU + BV$.

Exercice 4. — Soient $P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$ et $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$. Déterminer le pgcd de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q.

Exercice 5. — Soient $P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1$ et $Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$. Trouver $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UP + QV = pgcd(P, Q)$. Quelles sont les racines communes de P et de Q ?

Exercice 6. — Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le pgcd de $A = X^4 + X^2 + 1$ et $B = X^4 + X + a$ est-il de degré ≥ 1 ?

Exercice 7. — Trouvez le pgcd de $X^{24} - 1$ et $X^{15} - 1$, et celui de $X^{280} - 1$ et $X^{60} - 1$.

Exercice 8. —

(a) Montrez par récurrence sur l'entier q que quelque soit l'entier b, on a $X^b - 1 \mid X^{bq} - 1$.

(b) Déduisez-en que le reste de la division de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ et $X^r - 1$, où r est le reste de la division (des entiers) de a par b.

(c) Quel est alors le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$?

(d) Application : trouvez le pgcd de $X^{5400} - 1$ et $X^{1920} - 1$.

Exercice 9. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $pgcd((X-1)^n, X^n - 1)$ en pensant aux racines communes. Pour $n = 3$ trouver $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X-1)^3V + (X^3 - 1)U = X - 1$.