Université de Strasbourg
Licence Math-Info

Sofiane Souaifi
Algèbre S3

Feuille 3 : décomposition en produit de facteurs irréductibles

Exercice 1. — Montrez que le polynôme $X^3 - 2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. — Montrez que le polynôme $X^3 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible.

Exercice 3. — Décomposez le polynôme $X^3 + 2 \in \mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 4. — Décomposez le polynôme $X^3 + 2 \in \mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 5. — Montrez que le polynôme $X^2 - 2$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6. — Montrez que le polynôme $X^2 - a$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ pour tout entier a qui n'est pas un carré. (Remarquez qu'un tel a possède au moins un diviseur α pour lequel α^2 ne divise pas a)

Exercice 7. — Soit $A = (X + 3)^2(X + 1)(X^2 + 1)^3$ la décomposition de $A \in \mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles. Soit P un diviseur de A. Nous avons donc $A = PQ$. Utilisez le théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles pour montrer qu'il y a 24 diviseurs unitaires distincts de A. Écrivez-les.

Exercice 8. — Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.
(a) $X^3 - 3$.
(b) $X^{12} - 1$.
(c) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 9. — Montrez qu'avec le polynôme A de l'exercice 7, on a :

$$P|A \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{ \begin{array}{rl} P & = (X+3)^\alpha (X+1)^\beta (X^2+1)^\gamma, \\ \text{avec} & \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}, \\ & 0 \le \alpha \le 2, 0 \le \beta \le 1, 0 \le \gamma \le 3. \end{array} \right.$$

Exercice 10. — Soient $P = 2 + 7X + 5X^2 + X^3$ et $Q = X + 4X^2 + 4X^3 + X^4$. Déterminer $pgcd(P, Q)$ et en déduire les racines communes de P et Q. Puis, trouver des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + QV = pgcd(P, Q)$. Enfin factoriser P et Q sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11. — Soient $P = -2 - 2X - X^2 + 2X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$. Déterminer $pgcd(P, Q)$ et en déduire les racines communes de P et Q. Puis, trouver des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + QV = pgcd(P, Q)$. Enfin factoriser P et Q sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.