Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur :
Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Feuille de TD n° 5 : Applications linéaires

1 Connaissance du cours

Exercice 1.1 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

(a). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$

(b). $f : [-\pi, +\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$

(c). $f : \mathbb{R} \to [-1; 1], x \mapsto \sin(x)$

(d). $f : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$

(e). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

(f). $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto x^2$

Aide pour (e) et (f) : pour a fixé, l'équation $z^2 = a$ a-t-elle toujours une solution quand on travaille dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Exercice 1.2 Ecrivez des phrases cohérentes et des énoncés corrects avec les ingrédients ci-dessous :

Une application $f : E \mapsto E'$ est [bijective/injective/surjective] si tout élément $w \in E'$ admet au [moins/au plus/exactement] un antécédent.

Soient E, E' des .... Une application $f : E \mapsto E'$ est dite linéaire si ....

La matrice A d'une application linéaire $f : E \mapsto E'$ relativement à ...... et à ...... est la matrice dont les colonnes sont ....

Exercice 1.3 De tête, écrivez les définitions

(a). de l'image d'une application linéaire ;

(b). d'une symétrie par rapport à un s.e.v. F de $\mathbb{R}^d$, parallèlement à un s.e.v. G de $\mathbb{R}^d$;

(c). d'un endomorphisme et d'un automorphisme.

Comparez le résultat avec la définition du cours (attention aux “petits" détails qui font toute la différence entre une définition correcte et une définition fausse ou incomplète).

Exercice 1.4 Soit f une application linéaire d'un e.v. E vers un e.v. E'. Complétez et démontrez les propriétés :

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\dots)$$

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker} f) = \dots$$

Exercice 1.5 Rappelez la définition d'une symétrie et d'une projection sur/par rapport à S, parallèlement à T. Quelle condition doivent vérifier S et T pour que cette définition ait un sens ? Comment obtient-on la matrice de telles applications ? Démontrez que:

(a). $f \circ f = f$ lorsque f est une projection.

(b). $f \circ f = I$ lorsque f est une symétrie.

2 Exercices d'application

Exercice 2.1 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-3 \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x, 3y+x) \end{array},$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x+4y \end{array}, \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, 1) \end{array}, \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xy+x, x) \end{array},$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto & (a+b-c, 2a-b+c, a+b+2c) \end{array}, \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (5t, t, 7t) \end{array}.$$

Exercice 2.2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (x+2z, 5x+2y+6z, y-2z).$$

(a). Montrer que f est une application linéaire.

(b). Calculer l'image du vecteur $(1,2,-1)$ par f.

(c). Les vecteurs $(10,-2,4)$ et $(5,-1,2)$ sont-ils dans le noyau de f ?

(d). Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(e). Donner une base et la dimension de $Im(f)$. L'application f est-elle surjective ?

(f). Donner une base et la dimension de $Ker(f)$. L'application f est-elle injective ?

Exercice 2.3 Toutes les applications ci-dessous, de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d'}$, sont linéaires. Pour chacune d'elles trouvez la matrice associée relativement aux bases canoniques, donnez une base de leur image et de leur noyau, déterminez si elle est injective, surjective. Quand elle est bijective, déterminez son application réciproque.

(a). $(x,y,z) \mapsto x+y+z$.

(b). $x \mapsto (x, 2x, 3x)$.

(c). $(x,y) \mapsto (2x-y, y+2x)$.

(d). $(x,y,z) \mapsto (z,y,x)$.

(e). $(x,y,z) \mapsto (x, x+y, x+y+z)$.

(f). $(x,y,z) \mapsto (x-z, x-y, y-z)$.

(g). $(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_2+x_3, x_1+x_2, x_4+x_1)$.

Exercice 2.4 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette application peut-elle être injective ? surjective ? bijective ? Justifier

Exercice 2.5 Trouvez une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+z, 2x+y)$. Que peut-on en déduire? Soit S le plan d'équation $2x+y+z=0$. Déterminer $f(S)$.

Exercice 2.6 Considérons une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$. En choisissant $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ comme base à la fois de départ et d'arrivée, donnez :

- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_1, e_2\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_3, e_4\}$
- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_3, e_4\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_1, e_2\}$
- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_4\}$
- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_1, e_4\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_2, e_3\}$
- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_1, e_2\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_3, e_4\}$
- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_3, e_4\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_1, e_2\}$
- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_4\}$
- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_1, e_4\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_2, e_3\}$

Exercice 2.7 Après avoir vérifié que les projections et symétries suivantes sont bien définies, écrivez leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

(a). la projection sur $\text{vect}\{(1,2,1)\}$, parallèlement à $\text{vect}\{(1,-1,-1),(1,1,1)\}$;

(b). la symétrie par rapport à $\text{vect}\{(1,2,1)\}$, parallèlement à $\text{vect}\{(1,-1,-1),(1,1,1)\}$;

(c). la projection sur $x+2y+z=0$, parallèlement à $\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$

(d). la symétrie par rapport à $\text{vect}\{(1,2,1)\}$, parallèlement à $x+2y+z=0$.

Exercice 2.8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a). Calculer l'image par f des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

(b). Soient $u = e_1 - e_2$ et $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 2.9 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (4x+2y-4z, -6x-4y+6z, -x-y+z).$$

(a). Montrer que f est une application linéaire. Cette application est-elle un endomorphisme ?

(b). Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note M cette matrice.

(c). Soient $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (0,2,1)$, $u_3 = (1,0,1)$.

  (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

  (b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ puis donner la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$. On note D cette matrice.

(c) Donner une égalité reliant les matrices M et D.

(d) Justifier le fait que f^n où $n \in \mathbb{N}$ est un endomorphisme. Donner la matrice de f^n dans la base canonique.

Exercice 2.10 Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice associée à $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette matrice est inversible. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer l'inverse de M.

Donner relativement à la base $\mathcal{F}$ puis relativement à la base canonique

- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_1, e_2\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_3\}$
- la matrice de la symétrie par rapport à $\text{vect}\{e_1\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_2, e_3\}$
- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_1\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_2, e_3\}$
- la matrice de la projection sur $\text{vect}\{e_2, e_3\}$ parallèlement à $\text{vect}\{e_1\}$

Notons p_1 et p_2 les deux projections décrites précédemment. Si v est une vecteur quelconque, que vaut $p_1(v) + p_2(v)$?

Exercice 2.11 On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par son action sur les vecteurs (k_1, k_2, k_3) de la base canonique par :

$$u(k_1) = -k_1, \;\; u(k_2) = k_1 + k_2 + k_3 \;\; \text{et} \;\; u(k_3) = -k_2 - k_3 \; .$$

(1) Déterminez la matrice de u dans la base canonique.
(2) Trouvez des bases de $\text{Ker}(u)$ et de $\text{Im}(u)$.
(3) Supprimons maintenant l'hypothèse selon laquelle $\{k_1, k_2, k_3\}$ est la base canonique : supposons que c'est une base quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminez la matrice de u dans cette base, et trouver à nouveau des bases de $\text{Ker}(u)$ et de $\text{Im}(u)$.

Exercice 2.12 Soit $\{k_1, k_2, k_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(k_1) = k_2 + k_3$, $f(k_2) = k_3 + k_1$, $f(k_3) = k_1 + k_2$.

(a). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b). Considérons

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x + y + z = 0\big\} \;\text{ et }\; G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x = y = z\big\} .$$

Donnez des bases de $f(F)$ et $f(G)$.

Exercice 2.13 On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on considère l'application linéaire composée des transformations successives suivantes :
– symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$;
– rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine (dans le sens trigonométrique) ;
– nouvelle symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$;
– projection sur l'axe des abscisses [droite de base (1,0)] parallèlement à l'axe des ordonnées [droite de base (0,1)] ;
– nouvelle rotation d'angle $\pi/4$.

Donnez la matrice de cette application linéaire dans la base canonique.
Conseil : utiliser deux méthodes, puis comparer les résultats et choisir pour l'avenir la méthode la plus efficace ! La première méthode utilise les matrices de chacune des transformations individuelles ; la seconde méthode consiste à suivre ce qui arrive aux vecteurs de la base canonique.

Exercice 2.14 Soient $\{k_1, k_2, k_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f(k_1) &= -k_1 - 6k_2 + 9k_3 \\ f(k_2) &= 2k_1 + 6k_2 - 6k_3 \\ f(k_3) &= k_1 + 2k_2 - k_3. \end{aligned}$$

(a). Déterminez une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

(b). Vérifiez que $S = \{u : f(u) = 2u\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.

(c). Montrez que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et S sont supplémentaires. Notons $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base obtenue en juxtaposant les bases de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et de S.

(d). Donnez la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2.15 (a). Soit T_A une application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique est $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. Si la forme bien échelonnée de A contient 3 lignes non nulles, quelles sont les dimensions de $\mathrm{Im}(T_A)$ et de $\mathrm{Ker}(T_A)$?

(b). Soit T_B une application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique est $B \in \mathcal{M}_{5;7}(\mathbb{R})$. Si la forme bien échelonnée de A contient 3 lignes non nulles, quelles sont les dimensions de $\mathrm{Im}(T_A)$ et de $\mathrm{Ker}(T_A)$?

(c). Soit T_C un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice relativement à la base canonique est C. Soit $(v_1, ..., v_5)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^5$. Si la famille $\{T_C(v_1), ...T_C(v_5)\}$ est libre, peut-on conclure que T_C est bijective ?

3 Quelques exercices un peu théoriques

Exercice 3.1 On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a). Montrer que les applications $D : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \mapsto f' \end{array}$ et $P : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \mapsto F \end{array}$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0 sont des endomorphismes de E.

(b). Déterminer les noyaux et images des endomorphismes $D, P, D \circ P, P \circ D$.

Exercice 3.2 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

  (a) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

  (b) $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$

(b). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

  (a) $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$

  (b) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

(c). Montrer que les quatre propositions précédentes sont équivalentes si E est de dimension finie.

Exercice 3.3 Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(a). Montrer que : $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}\, u + Im\, v$ puis que $\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

(b). On suppose que $uov = 0$ et que $u + v$ est bijective. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.

4 QCM récapitulatif

QCM 4.1 Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E'. On peut dire que :

(a). si $v = 0$ alors $f(v) = 0$ ☐

(b). si $f(v) = 0$ alors $v = 0$ ☐

(c). $f(E)$ est un sous-ensemble de E' ☐

(d). $f(E)$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E' ☐

(e). pour tout sous-espace-vectoriel S de E, $f(S)$ est un sous-espace vectoriel de E' ☐

(f). si u et v sont deux vecteurs colinéaires de E, alors $f(u)$ et $f(v)$ sont deux vecteurs colinéaires de E' ☐

(g). si u et v sont deux vecteurs distincts de E, alors $f(u)$ et $f(v)$ ne peuvent pas être identiques ☐

(h). si u est un vecteur de E et v est son opposé, alors $f(v) + f(u)$ est égal au vecteur nul de E' ☐

(i). si $\{e_1, ..., e_d\}$ est une base de E alors $\{f(e_1), ..., f(e_d)\}$ est une base de E' ☐

(j). si $\dim E > \dim E'$ alors f n'est pas surjective ☐

(k). si $\dim E > \dim E'$ alors f n'est pas injective ☐

QCM 4.2 On peut dire que les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ sont des applications linéaires :

(a). $(x, y) \mapsto (x + 3y, y - x, 2x + 2)$ ☐

(b). $(x, y) \mapsto (0, 2x, 1)$ ☐

(c). $(x, y) \mapsto (y, x, 0)$ ☐

(d). $(x, y) \mapsto (ay, bx, 0)$ oÃź a, b sont des paramétres réels. ☐

(e). $(x, y) \mapsto (xy, yx, 0)$ ☐

QCM 4.3 Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 7x_2 + x_3, x_1 + x_3)$. On peut dire que :

(a). sa matrice relativement aux bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐

(b). son image contient le vecteur $(1, 3, 3)$. ☐

(c). son noyau est de dimension 1. ☐

(d). son image est de dimension 1. ☐

QCM 4.4 Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -4x_1 + hx_2, x_1 + (12 - h)x_2)$.

(a). T est injective pour tout h différent de 16. ☐

(b). T n'est surjective pour aucune valeur de h. ☐

(c). Lorsque T n'est pas injective, son image est de dimension 1. ☐

QCM 4.5 On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit s la symétrie par rapport à la droite D_1 (d'équation $x+y=0$), parallèlement à la droite D_2 d'équation $3x+y=0$.

(a). L'image du vecteur $(-1,1)$ par s est égale au vecteur $(-1,1)$. ☐

(b). L'image du de la droite D_1 par s est égale à la droite D_1. ☐

(c). L'image du vecteur $(-1,3)$ par s est égale au vecteur $(-1,3)$. ☐

(d). L'image du de la droite D_2 par s est égale à la droite D_2. ☐

(e). Si l'on choisit comme base de départ $\{(-1,1),(-1,3)\}$ et comme base d'arrivée la base canonique, alors la matrice de s est $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ☐

(f). La matrice de s (par rapport aux bases canoniques comme bases de départ et d'arrivée) est $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐

(g). La matrice de s (relativement aux bases canoniques) a un déterminant non nul. ☐

(h). s est une application inversible dont l'inverse est une projection. ☐

QCM 4.6 La matrice de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan vectoriel P d'équation $x+2y-z=0$, parallèlement à la droite vectorielle D d'équations $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ est

(a). $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(b). $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(c). $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(d). $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐