Université de Strasbourg
L1S2

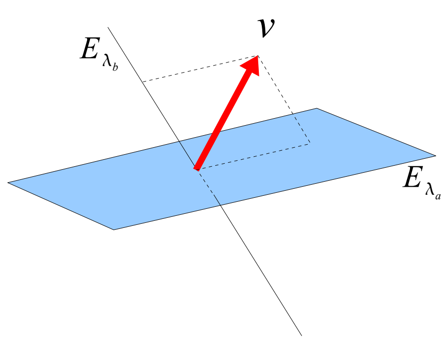
Coordonnateur :
Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

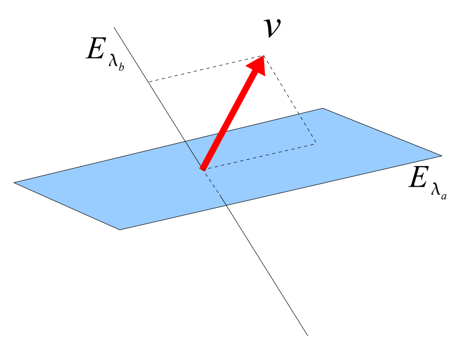
Algèbre linéaire
Feuille de TD n° 6 : Diagonalisation

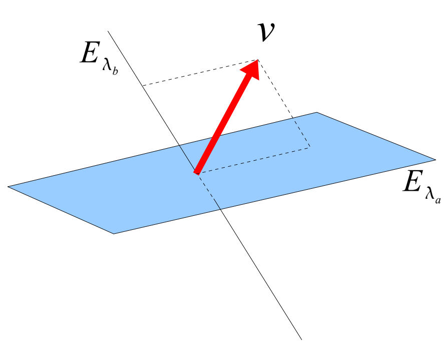
1 Connaissance du cours

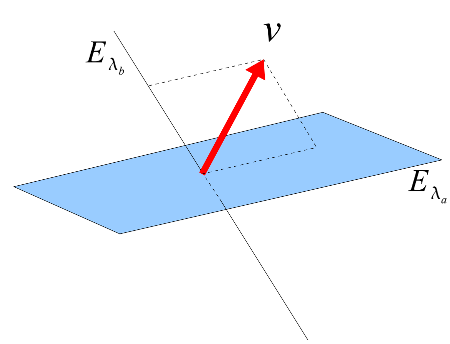
Exercice 1.1 Considérons une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dont les valeurs propres sont λ_a et λ_b. Supposons que l'espace propre E_{λ_a} soit un plan, et que l'espace propre E_{λ_b} soit une droite. L'application f est donc diagonalisable. Sur les dessins 3D ci-dessous, tracez les images du vecteur v par f dans les cas suivants:
1/ $\lambda_a = \frac{1}{2}$, $\lambda_b = -\frac{1}{2}$. 2/ $\lambda_a = \frac{1}{2}$, $\lambda_b = 2$. 3/ $\lambda_a = \frac{1}{2}$, $\lambda_b = -2$.
4/ $\lambda_a = -1$, $\lambda_b = 1$. 5/ $\lambda_a = -1$, $\lambda_b = -2$. 6/ $\lambda_a = 0$, $\lambda_b = 1$.

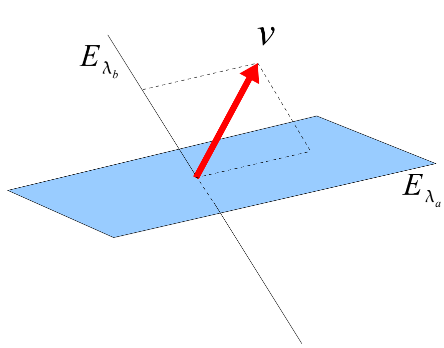
Reconnaître, le cas échéant, si f est une symétrie (ou une projection) ou la composée d'une projection (ou d'une symétrie) et d'une homothétie. Déterminer le comportement de $n \mapsto f^n(v) = f \circ f \circ ... \circ f(v)$ quand n tend vers l'infini.

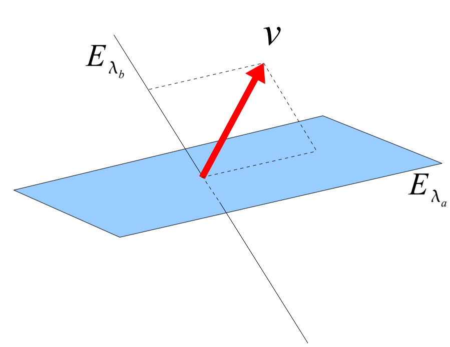












Exercice 1.2 Soit A une matrice carrée. Corriger et/ou compléter les phrases suivantes :

- Une valeur propre de A est un scalaire vérifiant $Av = \lambda v$.
- On calcule les valeurs propres de A en résolvant un système linéaire.
- On trouve les vecteurs propres en ...
- Zéro est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas ...
- Si A admet d valeurs propres disctinctes ...
- Si A admet deux valeurs propres distinctes λ_a et λ_b et si les espaces propres associés sont supplémentaires alors ...
- Si A est diagonalisable et si A n'admet qu'une seule valeur propre alors ...
- Supposons que A soit diagonalisable, et soit P la matrice associée à la base de vecteurs propres. Alors la matrice PAP^{-1} est diagonale.
- L'espace propre associé à une valeur propre λ est le noyau de l'application $v \mapsto Av$.
- Supposons que A soit diagonalisable. Alors A^2 est diagonalisable et sa diagonalisation est donnée par ...

Exercice 1.3 On considère la suite définie par récurrence : $s_{n+1} = s_n + 2s_{n-1} + 4s_{n-2}$ pour $n \geq 2$ et $s_0 = 1, s_1 = 2, s_2 = 8$.

- Transformer cette relation de récurrence en une relation matricielle. Pour cela, on utilisera $S_n = \begin{bmatrix} s_n \\ s_{n-1} \\ s_{n-2} \end{bmatrix}$.
- Exprimer S_n en fonction de la puissance d'une matrice (mais on ne calculera pas cette puissance de matrice).

Exercice 1.4 On considère la suite définie par récurrence : $s_{n+1} = s_n + 2s_{n-1} + 4s_{n-3}$. Donner une expression de s_n. ATTENTION : il y a peut-être des données manquantes.

2 Exercice niveau 1

Exercice 2.1 Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_3 + e_1$, $f(e_3) = e_1 + e_2$.

(a). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b). Déterminer les images par f des sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\right\}.$$

(c). Diagonaliser f si cela est possible.

Exercice 2.2 Déterminer pour chacune des matrices suivantes ses valeurs propres, ses vecteurs propres et préciser si elle est diagonalisable ou non.
Aide : Le polynôme caractéristique a toujours une racine évidente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -8 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-4&12\\1&-2&5\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}$$

Exercice 2.3 Diagonaliser, quand c'est possible, les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

Exercice 2.4 Diagonaliser la matrice suivante sachant que ses valeurs propres sont $0,1,2$.

$$D=\begin{pmatrix}0&0&-6&0\\2&1&4&0\\0&0&2&0\\1&0&4&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5 Sachant que $(1,1,0)$ est un vecteur propre, donner une valeur propre de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix}3&0&1\\2&1&1-a^2\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

Exercice 2.6 (Corrigé) Considérons l'endomorphisme f dont la matrice est

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(a). Ecrire la matrice $\tilde{A}$ de f dans la base dont la matrice est $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

(b). Calculer $\tilde{A}^n$.

(c). Donner la formule qui permet de calculer A^n.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ \tilde{A}^n=\begin{pmatrix}2^n&0&n2^n\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$

$$A^n=P\tilde{A}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\2^{-1+n}n&2^n+2^{-1+n}n&-2^{-1+n}n\\2^{-1+n}n&2^{-1+n}n&2^n-2^{-1+n}n\end{pmatrix}$$

Exercice 2.7 (Non corrigé) Considérons l'endomorphisme f dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a). Ecrire la matrice $\tilde{A}$ de f dans la base dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b). Calculer $\tilde{A}^n$.

(c). Donner la formule qui permet de calculer A^n.

3 Exercice niveau 2

Exercice 3.1 • La suite de Fibonacci est donnée par la relation de récurrence $F_n = F_{n-1} + F_n$ pour $n \geq 2$, et $F_0 = 1, F_1 = 1$. Transformer cette relation en une relation matricielle.

- Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_a = ...$ et $\lambda_b = ...$.
- Ne pas calculer les vecteurs propres explicitement !
  Notons $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à λ_a.
  Notons $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à λ_b.
- Montrer que F_n s'écrit $F_n = c\lambda_a^n + d\lambda_b^n$ où c, d sont des constantes que l'on déterminera.
- Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ converge vers le nombre d'or (égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

Exercice 3.2 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante. Essayer de l'obtenir directement sous forme factorisée. En déduire ses valeurs propres.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.3 Pour quelle valeur t_o de t la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & 3 \end{pmatrix}$ admet-elle la valeur propre 2 ? Achever dans ce cas la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres.

Exercice 3.4 (a). Considérons la matrice A suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b). L'espionnage de votre voisin vous indique que $2, 3$ en sont des valeurs propres. Et que les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres (mais associés chacun à quelle valeur propre ?). À l'aide de ces informations, diagonaliser A.

(c). Déterminer, sans refaire de calcul, l'image et le noyau de A.

(d). Déterminer, sans refaire de calcul, la solution du système $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Réduction de matrices non diagonalisables

Exercice 4.1 Considérons l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ de matrice associée relativement aux bases canoniques

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

(a). Les valeurs propres de cet endomorphisme sont $\lambda_a = 1$ et $\lambda_b = 2$.

(b). Trouver un vecteur propre v_a associé à λ_a et un vecteur propre v_b associé à λ_b. Pourquoi f n'est-il pas diagonalisable ?

(c). Trouver un vecteur w_a tel que $(A - \lambda_a I)w_a = v_a$. Vérifier que (v_a, w_a, v_b) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut Aw_a ? Quelle est la matrice de f dans la base $\{v_a, w_a, v_b\}$?

(d). Comment utiliser le travail que nous venons de faire pour calculer A^n ?

Exercice 4.2 En s'inspirant de l'exercice précédent, réduire "au mieux" les matrices suivantes (Attention, la matrice B nécessite d'être astucieux):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5 QCM

QCM 5.1 Soit f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de matrice associée relativement aux bases canoniques $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, ☐

(b). une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, ☐

(c). une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$, ☐

(d). une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 0)\}$, ☐

(e). une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$,

(f). une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est de la forme: $\{(-1,1,1,*)\}$,

(g). une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est de la forme: $\{(-1,1,1,*),(1,1,0,*)\}$,

(h). une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est de la forme: $\{(1,1,0,*)\}$,

(i). une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est : $\{0\}$.

QCM 5.2 Soit g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de matrice associée relativement aux bases canoniques $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a). Une base de $\mathrm{Im}(g)$ est $\{(1,1,0,0),(1,1,1,1),(1,1,-1,-1)\}$,

(b). une base de $\mathrm{Im}(g)$ est $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0)\}$,

(c). une base de $\mathrm{Im}(g)$ est $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$,

(d). une base de $\mathrm{Im}(g)$ est $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$,

(e). une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est $\{(1,2,*)\}$,

(f). une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est $\{(1,1,*),(1,2,*)\}$,

(g). une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est $(\{1,1,*)\}$,

(h). une base de $\mathrm{Ker}(g)$ est $\{0\}$.

QCM 5.3 Soit T : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice associée relativement aux bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). T est bijective,

(b). T est injective mais non surjective,

(c). T est surjective mais non injective,

(d). T n'est ni injective ni surjective,

(e). T est injective et surjective.

Q6 : Soit T : $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ une application linéaire dont le noyau est de dimension 3. On peut dire que

(a). $\dim \mathrm{Im}\, T = 1$,

(b). $\dim \mathrm{Im}\, T = 2$,

(c). $\dim \mathrm{Im}\, T = 3$,

(d). $\dim \mathrm{Im}\, T = 4$,

(e). T n'est pas surjective.

QCM 5.4 Soit $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a). Le polynôme caractéristique associé est: $x^2 + 3x - 1$, $\square$

(b). le polynôme caractéristique associé est: $x^2 - 3x - 1$, $\square$

(c). le polynôme caractéristique associé est: $3x + 1$, $\square$

(d). le polynôme caractéristique associé est: $x^2 - 3x + 1$, $\square$

(e). $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ est une valeur propre. $\square$

QCM 5.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). A est triangulaire inférieure, $\square$

(b). les valeurs propres de A sont: 1 et 2, $\square$

(c). les valeurs propores de A sont: 0, 1 et 2, $\square$

(d). A est diagonalisable. $\square$

QCM 5.6 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a). Les valeurs propres de B sont : 2 et 3, $\square$

(b). les valeurs propres de B sont : -1, 2 et 3, $\square$

(c). les valeurs propres de B sont : -1 et 3, $\square$

(d). les valeurs propres de B sont : 0, 1 et 3, $\square$

(e). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme: $\{(0, 0, *)\}$ $\square$

(f). Une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme: $\{(0, 1, *), (0, 0, *)\}$ $\square$

(g). Une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme: $\{(0, 1, *)\}$, $\square$

(h). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme: $\{0\}$. $\square$

QCM 5.7 Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). 2 est valeur propre, $\square$

(b). la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est 0, $\square$

(c). la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est 1, $\square$

(d). la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est 2, ☐

(e). la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est 4, ☐

(f). un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est donné par $(2, -1, 1)$, ☐

(g). un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est donné par $(0, 0, 0)$. ☐

QCM 5.8 Soit $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Laquelle parmi les matrices P est-elle telle que $P^{-1}DP$ est diagonale ?

(a). $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & * \end{pmatrix}$, ☐

(b). $P = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ☐

(c). $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}$, ☐

(d). $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & * \end{pmatrix}$. ☐

QCM 5.9 Si A et B sont deux matrices 2×2 ayant toutes deux pour valeurs propres 1 et 2, on peut dire que :

(a). il existe une matrice inversible P telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, ☐

(b). il existe une matrice inversible Q telle que $A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, ☐

(c). A n'est pas inversible, ☐

(d). $A = B$, ☐

(e). A et B ont les mêmes vecteurs propres, ☐

(f). il existe une matrice inversible R telle que $A = RBR^{-1}$. ☐

QCM 5.10 On peut dire que les matrices suivantes sont diagonalisables :

(a). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ☐

(b). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, ☐

(c). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ☐

(d). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ☐

QCM 5.11 Soit $E = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). les valeurs propres de E sont: 1, 2 et 3, ☐

(b). les valeurs propres de E sont:1, 2 et 4, ☐

(c). les valeurs propres de E sont:1 et 2, ☐

(d). les valeurs propres de E sont: 2, ☐

(e). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme : $\{(-2, 1, *)\}$, ☐

(f). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme : $\{(-2, 2, *), (1, 1, *)\}$, ☐

(g). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme : $\{(1, 1, *)\}$, ☐

(h). une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de la forme : $\{0\}$, ☐

(i). une matrice P telle que $P^{-1}EP$ est diagonale est de la forme: $P = \begin{pmatrix} * & -2 & -2 \\ 0 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$, ☐

(j). une matrice P telle que $P^{-1}EP$ est diagonale est de la forme: $P = \begin{pmatrix} * & 1 & -2 \\ 0 & * & 1 \\ 1 & -1 & * \end{pmatrix}$, ☐

(k). une matrice P telle que $P^{-1}EP$ est diagonale est de la forme: $P = \begin{pmatrix} * & 2 & 3 \\ 0 & * & 1 \\ 1 & -1 & * \end{pmatrix}$, ☐

(l). une matrice P telle que $P^{-1}EP$ est diagonale est de la forme: $P = \begin{pmatrix} * & 3 & 4 \\ 2 & * & 2 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$. ☐