1 Difficulté 1

1.1 Biscuits de Kado

Olivin fait sa provision de biscuits veloutés pour son petit chien Kado. Il se présente à une boutique spécialisée et demande 100 biscuits. Le commis lui répond :

- J'ai seulement des sacs de cinq biscuits et des sacs de sept biscuits. Je vais essayer d'arranger cela.

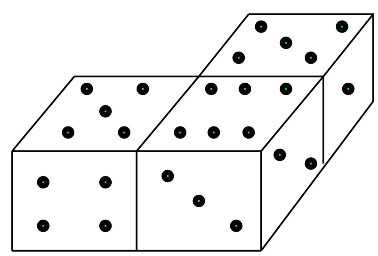
- Je veux le moins de sacs possible, demande Olivin.

Combien de sacs de chaque quantité Olivin recevra-t-il ?

Comme 5 et 100 sont des multiples de 5, il faut que le nombre de sacs de sept biscuits soit un multiple de 5. Si le commis donne cinq sacs de sept biscuits, il fournira 13 sacs de cinq biscuits : ce qui fait 18 sacs en tout. Si le commis donne 10 sacs de sept biscuits, il fournira six sacs de cinq biscuits : ce qui fait 16 sacs en tout. Olivin recevra six sacs de cinq biscuits et 10 de sept biscuits.

1.2 La face cachée des dés

Quelle est la somme des points se trouvant sur les faces non visibles des dés suivants?



RAMENER UN DÉ
La somme des points au total sur un dé est $1+2+3+4+5+6=21$ et donc le total des points sur les trois dés est 63. Le total des points sur les faces visibles est $5+6+5+4+3+2+1=26$. Nous calculons donc $63-26=37$.

1.3 Apétit gargantuesque

Le Lagiacrus est une créature ayant un apétit hors du commun. Se retrouvant face à un troupeau de 10 herbivores colossaux, il ne peux s'empêcher de se jetter sur eux et d'en dévorer 3. Il fait une pause le temps de boire un coup dans un ruisseau non loin puis en mange 3 de plus. Après une petite pause digestive il décide de manger tous ceux qui restent sauf 3.

Combien reste-t-il d'herbivores dans le troupeau ?

Ben... Il en reste 3, comme l'énoncé le dit lui même.
Je ne sais pas si beaucoup de gens vont répondre $10-3-3-3=1$...

1.4 Les fondamentaux

Pour chacun des chiffres (0 à 9) trouvez un moyen de l'écrire en utilisant exactement une fois chacun des chiffres 1, 2 et 3, liés par les symboles mathématiques que vous voulez (+, -, ×).

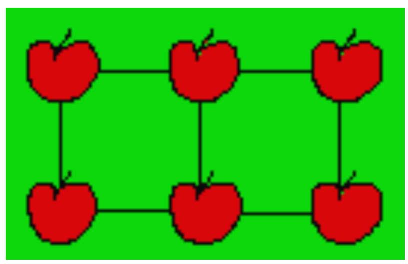
Exemple : $3 = 3 \times (2 - 1)$.

Il n'y a pas d'astuce particulière ni de réponse unique.

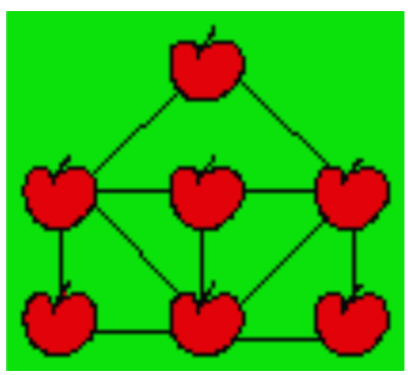
$$\begin{array}{ccc} 1 = 3 - 2 \times 1 & 2 = 3 - 2 + 1 & 3 = 3 \times (2 - 1) \\ 4 = 3 + 2 - 1 & 5 = 3 + 2 \times 1 & 6 = 3 + 2 + 1 \\ 7 = 3 \times 2 + 1 & 8 = (3 + 1) \times 2 & 9 = 3 \times (2 + 1) \\ & 0 = 3 - 2 - 1 & \end{array}$$

1.5 Pommes de Rougeaud

Rougeaud vient de récolter six pommes. Il les place sur le sol de façon à former deux carrés. Voici la disposition des pommes.

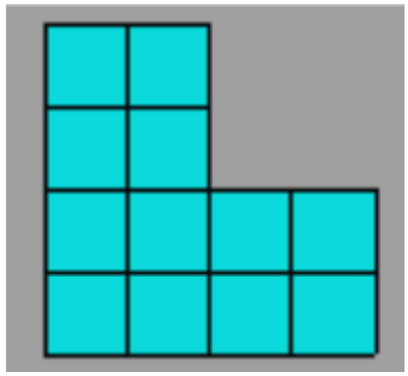


En ajoutant une seule pomme, fait apparaitre un carré supplémentaire (un peu plus grand que les autres).

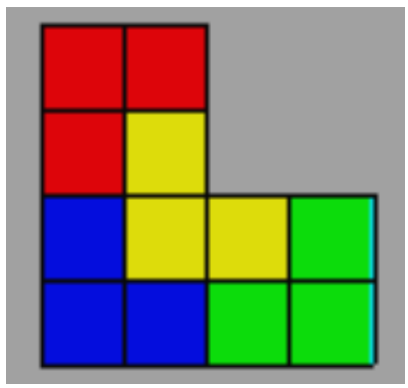


1.6 Enclos individuels

Francesco prépare un enclos pour chacun de ses quatre lapins. Chaque enclos doit être de même forme et de même grandeur. Voici le terrain disponible :



Il y a 12 petits carrés. Chaque enclos doit être constitué de trois petits carrés. Voici la disposition des quatre enclos



1.7 Voyages à l'école

Voici une liste d'élève, de matière et de lieu.

- Élèves : Cécile, Inès, Régine, Ginie
- Matières : biologie, chimie, géographie, histoire
- Lieux : France, Haïti, Italie, Mexique

1. Cécile aime l'histoire ou la géographie.
2. Régine a vu l'Italie ou Haïti.
3. Si Régine a visité l'Italie, elle aime la biologie ; sinon, elle aime la chimie.
4. Ginie n'a jamais mis les pieds au Mexique et elle n'aime pas la biologie.
5. Celle qui aime la géographie a déjà visité la France.
6. Inès ou Ginie a déjà fait un séjour à Haïti.
7. Inès aime la géographie ou a visité l'Italie.

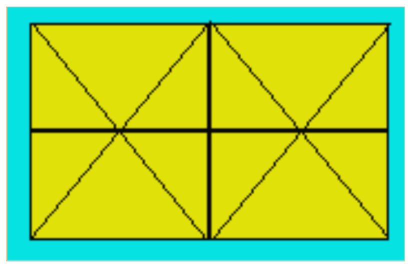
Quelle est la matière préférée et le lieu visité de chacune ?

D'après les indices 2 et 6, Régine a visité l'Italie. Elle aime la biologie (indice 3). Inès aime la géographie (indice 7) et a visité la France (indice 5). Cécile aime l'histoire (indice 1). Gine aime la chimie (par déduction) et a visité Haïti (indice 4). Cécile a visité le Mexique. Gine a visité Haïti. Voici un tableau qui illustre la situation :

Élèves	Cécile	Inès	Régine	Ginie
Matières	histoire	géographie	biologie	chimie
Lieux	Mexique	France	Italie	Haïti

1.8 Combien de triangle

Combien de triangle dans la figure ci-dessous. Pas que les petits!



6*2 triangles élémentaire
6 formés de deux
4*2 formés de trois
1*2 formés de six

2 Difficulté 2

2.1 Poulailler de Darine

Darine a acheté un sac de coquilles pour ses poules qui picorent dans deux enclos. Avant de concasser les coquilles, elle les compte. Elle se dit :

- Si je donnais quatre coquilles à chaque poule de l'enclos A et trois coquilles à chacune de l'enclos B, il me resterait trois coquilles.
- Si je donnais trois coquilles à chaque poule de l'enclos A et quatre coquilles à chacune de l'enclos B, il m'en manquerait cinq.
- Si je donnais quatre coquilles à chaque poule, il m'en manquerait 14.

Combien Darine a-t-elle de poules ?

La différence entre le nombre de coquilles qui manquent dans le troisième cas et le nombre de celles qui manquent dans le deuxième cas est 14 - 5 = 9. La différence entre le nombre de coquilles qui manquent dans le troisième cas et le nombre de celles qui restent dans le premier cas est 14 - (-3) = 17. Il y a 9 poules dans l'enclos A et 17 poules dans le B.
Darine a 26 poules.

2.2 Télémagouilles

Véronique participe à l'émission 'Télémagouilles'. Cette émission invite les participants à répondre au plus de questions de culture générale possible en un minimum de temps.

Pendant toute la durée du jeu, Véronique a demandé 8 fois au présentateur de répéter sa question et a répondu 'Stéphanie de Monaco' à 5 questions, dont 4 où elle a répondu du tac au tac et 1 où elle a demandé au présentateur de répéter la question.

Combien de questions au minimum le présentateur a posé à Véronique ?

> Dans le pire des cas Véronique a pu demander 8 fois au présentateur de répéter la même question avant de répondre 'Stéphanie de Monaco'. La réponse est donc 5.
> <u>Note :</u> Et n'oubliez pas : 'Avec Télémagouilles on en a... plein les fouilles !'

2.3 Le bon chasseur et le mauvais chasseur

Dans le Bouchonois, c'est l'ouverture de la chasse à la galinette cendrée. Cette année Dédé et Robert sont bien décidés à déterminer lequel des deux est un bon chasseur et lequel est un mauvais chasseur.

Dédé et Robert avancent ensemble dans la forêt, tirant chacun à leur tour quand ils voient un truc qui bouge.

A chaque fois que Dédé tire, il touche autant de galinettes cendrées que ce que Robert en a touché depuis le début de la partie de chasse.

A chaque fois que Robert tire, il touche autant de galinettes cendrées que Dédé lors de son dernier tir.

C'est Dédé qui tire le premier et Robert et Dédé décident de s'arreter après avoir tiré 10 cartouches chacun.

Combien de galinettes cendrées ont-ils touchées ?

Aidez-vous éventuellement de ce tableau:

	Dédé	Robert
tir 1		
tir 2		
tir 3		
tir 4		
tir 5		
tir 6		
tir 7		
tir 8		
tir 9		
tir10		

> En faisant les premières étapes à la main on se rend vite compte que Dédé et Robert ne vont jamais toucher une seule galinette cendrée sur toute leur partie de chasse.
> <u>Note :</u> Heureusement pour les galinettes cendrées, ces chasseurs sont tous les deux mauvais.

2.4 Gourmandise

Sakura raffole des sucreries. En passant sur la place du marché elle décide d'acheter un sachet contenant des bonbons de trois couleurs différentes : 4 rouges, 8 blancs et 24 jaunes.

Sur le chemin du retour elle ne peut pas résister et commence à en manger. Elle mange d'abord des rouges, puis deux fois plus de blancs et enfin trois fois plus de jaunes que ce qu'elle a mangé de blancs.

En arrivant chez elle, elle se rend compte qu'il lui reste autant de bonbons de chaque couleur. Combien de bonbon lui reste-t-il ?

Le plus simple reste de tester toutes les valeurs possibles du nombre de bonbons rouges mangés. On se rend alors compte que le seul moyen pour qu'il reste autant de bonbons de chaque couleur à la fin c'est qu'elle ait tout mangé.
Note : En même temps j'avais bien dit qu'elle RAFFOLE des bonbons.

2.5 L'âge de Gotha

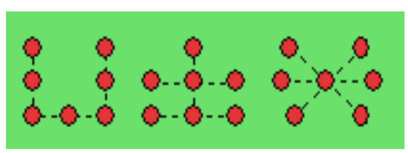
Gotha est père de deux enfants. Il a trois fois l'âge de son fils et deux fois celui de sa fille. On sait aussi que les deux enfants ont cinq ans d'écart.

Quel est l'âge de Gotha ?

On note x l'âge du fils, y l'âge de la fille et z l'âge de Gotha.
On sait que $z = 2y = 3x$ et $y - x = 5$. On trouve alors en remplaçant x par $z/3$ et y par $z/2$ l'équation $z/2 - z/3 = z/6 = 5$ d'où $z = 30$.

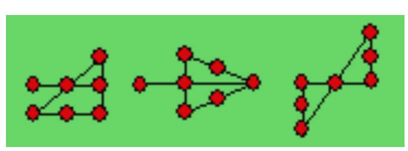
2.6 Boules de tennis

Gérald prend sept boules. Il les dispose de façon à obtenir trois rangées de trois boules chacune. Voici trois configurations :



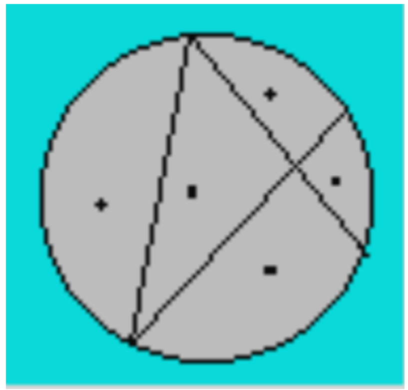
Disposez maintenant les sept boules de façon à obtenir quatre rangées de trois boules chacune

La distance entre les boules n'est pas importante. Toutefois, il faut s'assurer qu'il n'y a pas une quatrième boule dans le prolongement du segment de droite qui définit la rangée. Voici trois configurations



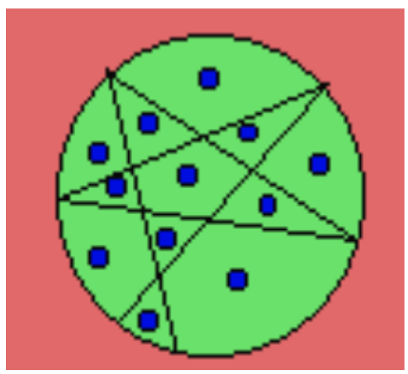
2.7 Cercle de Tina

Tina a partagé un cercle en cinq parties au moyen de trois lignes droites comme ceci



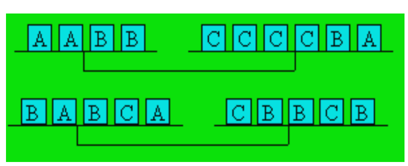
Elle désire maintenant partager un autre cercle avec cinq lignes droites sans lever son crayon. Combien Tina peut-elle obtenir de parties au maximum ?

La première droite partage le cercle en deux parties. La deuxième droite permet d'ajouter une partie. Alors on a trois parties. La troisième droite, en coupant la première droite permet d'ajouter deux parties. Alors on a cinq parties. La quatrième droite en coupant les deux premières permet d'ajouter trois parties. Alors on a huit parties. La cinquième en coupant les trois premières permet d'ajouter quatre parties. Alors on a 12 parties. Voici une façon de partager le cercle



2.8 Joachim balance

Joachim prend deux balances et place des objets sur les plateaux pour qu'ils soient en équilibre. Les objets ayant la même marque ont la même masse



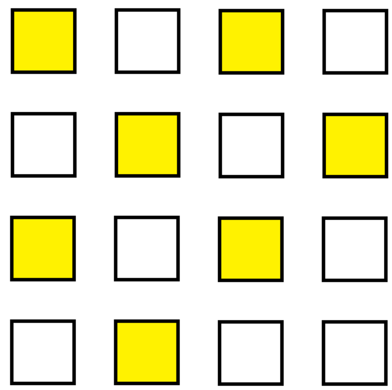
De A, de B et de C, quel objet a la plus grande masse ?

Sur chaque plateau de la première balance, on enlève un A et un B ; il reste A + B = 4C. Sur chaque plateau de la deuxième balance, on enlève deux B et un C ; il reste 2A = C + B. On additionne les deux égalités ; on obtient 3A + B = B + 5C. On raye les B ; il reste 3A = 5C. Par exemple, si A = 5, alors C = 3 ; puis B = 7. D'où, c'est B qui a la plus grande masse

3 Difficulté 3

3.1 Des voyants qui font 'bip' et qui font 'flash'

Le commandant Buck Murdock est face à une grille de quatre lignes et quatre colonnes de voyants dont certains clignotent et d'autres sont éteints. En ayant marre de voir ces voyants allumés, il décide de tous les éteindre. Il n'a à sa disposition que huit boutons (un par ligne et colonne) et à chaque fois qu'il active un bouton il change l'état de tous les voyants sur la ligne ou la colonne associée au bouton.



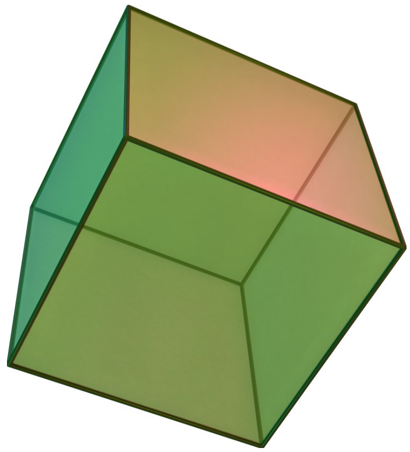
Peut-il réussir à tous les éteindre ? En combien de coups au minimum ?

Le commandant Buck Murdock ne pourra jamais éteindre tous les voyants, et on peut le voir d'une façon très simple : A chaque fois qu'il appuie sur un bouton le nombre de voyants allumés varie d'un nombre pair (-4, -2, 0, 2 ou 4 en fonction de la composition de la ligne ou de la colonne). Comme 7 voyants sont allumés, il en restera toujours au moins 1 d'allumé.
(Par contre on peut se demander si c'est possible en supposant qu'on a la même situation initiale mais en éteignant le voyant en haut à gauche, ou encore en ayant seulement deux voyants d'allumés au départ. Personellement, je crois que ce n'est toujours pas possible mais je n'ai aucun élément de preuve...)
Note : Pauvre sergent, c'est comme si ces voyants voulaient sa mort...

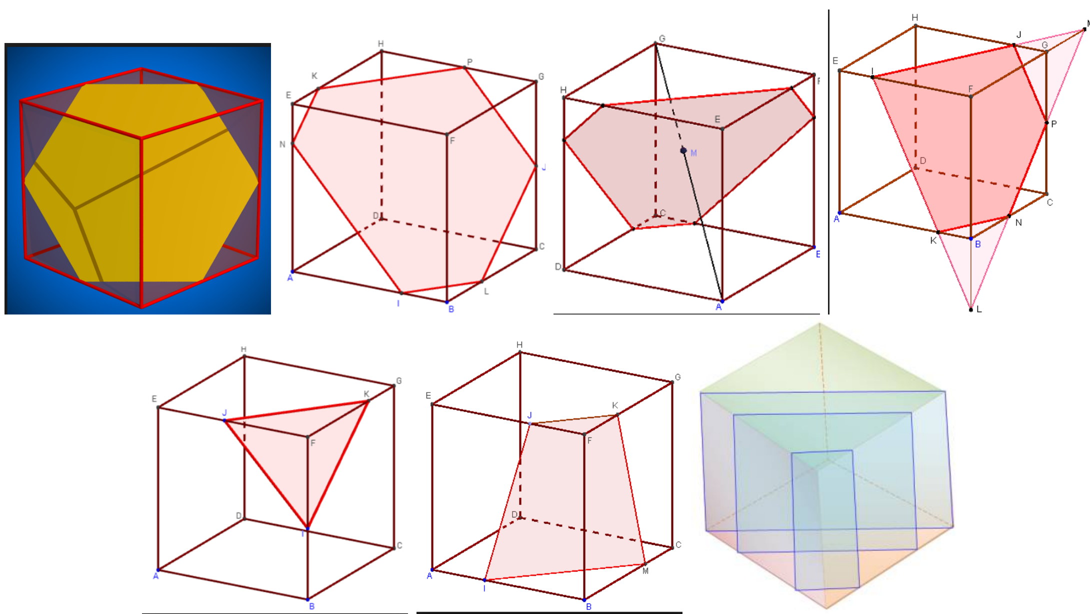
3.2 Cubes à couper

Quels sont les différentes formes que l'on peut obtenir en coupant une tranche de cube?

Et aussi: quel est le plus grand triangle et le plus le plus grand rectangle que l'on peut trouver.

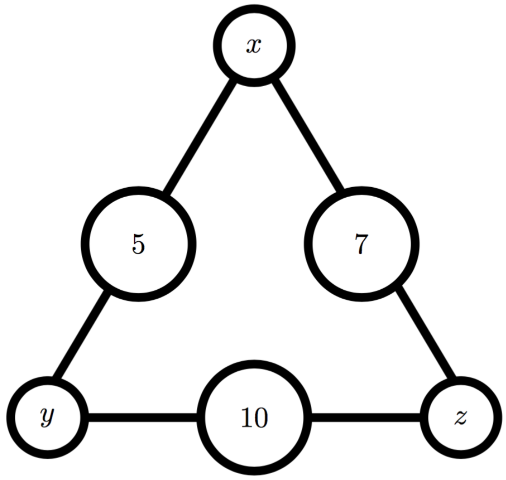


Tous les polygones de 3 à 6 côté, réguliers ou non. Si on fait des découpes sur les angles, on peut aussi obtenir un segment ou un point.



3.3 Triangle à sommer

Les nombres dans les grands cercles sont la somme des nombres écrits dans les petits cercles adjacents à chacun d'eux. Quelle est la somme des nombres dans les petits cercles ?



Les équations qui décrivent la figure sont: $x+y=5$, $y+z=10$ et $z+x=7$. En les additionnant, nous obtenons $2(x+y+z)=22$, ainsi $x+y+z=11$.

3.4 Le retour de Marcel Patoulacci

Marcel Patoulacci est brigadier chef (et agent de la paix avant tout). Aujourd'hui il reçoit un appel de la part de Miss Mary qui est en train de se faire cambrioler. Il n'hésite pas une seconde avant de sauter dans sa voiture et de foncer sur le lieu du crime. Cependant il ne sait pas quelle route prendre.

Si il passe par la ville il doit rouler à 50 km/h pendant 15 km.

Si il passe par le périphérique, il doit rouler pendant 2 km à 50 km/h puis 15 km à 90 km/h et enfin 3 km à 50 km/h.

Quel est le trajet le plus rapide ?

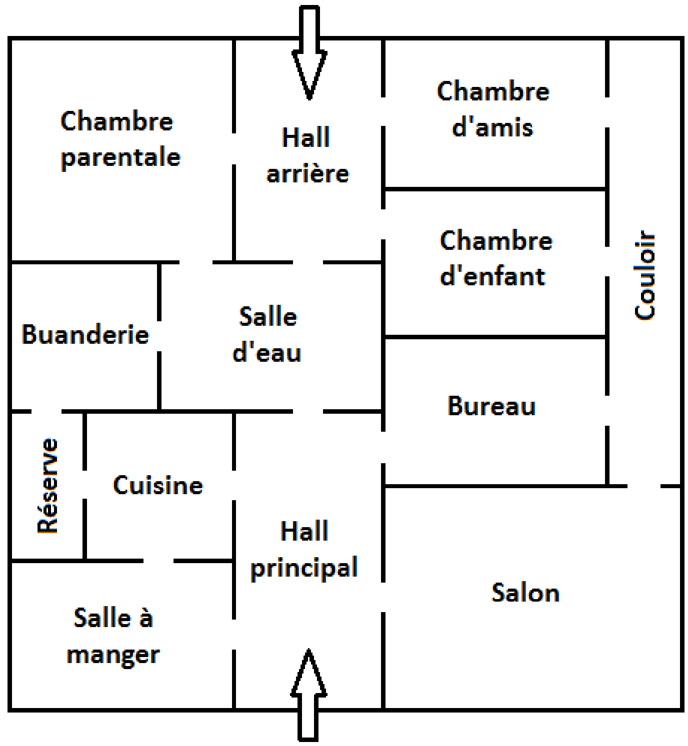
Il suffit de calculer le temps de parcours des deux trajets.
Par la ville, il mettra 15/50=3/10 heures soit 18 minutes.
Par le périphérique, il roulera pendant (2+3)/50=1/10 heures à 50km/h et 15/90=1/6 heures à 90km/h. Il roulera donc un total de 1/10+1/6=8/30 heures soit 16 minutes.
Il lui faut donc passer par le périphérique.

3.5 Au voleur ! (encore)

Un voleur malchanceux décide de retenter sa chance après s'être fait capturer l'an dernier par Marcel Patoulacci.

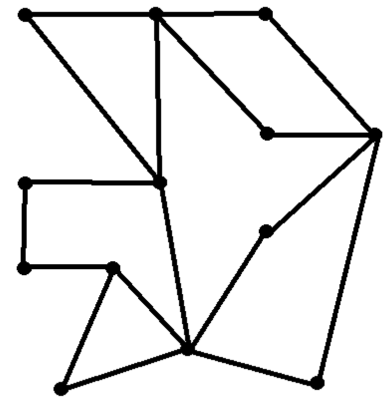
Il a entendu dire que Miss Mary a changé de villa récemment et que toutes les poignées de porte de sa nouvelle demeure sont en métal précieux. Il décide alors de sauter sur l'occasion.

Cependant, pour éviter de se faire pincer comme l'an dernier, il décide qu'il ne va se concentrer que sur les poignées de porte. Son objectif est uniquement de passer par chaque porte une et une seule fois. Il ne peut rentrer dans la villa que par le hall principal ou le hall arrière. Il ne cherche pas forcément à en sortir.

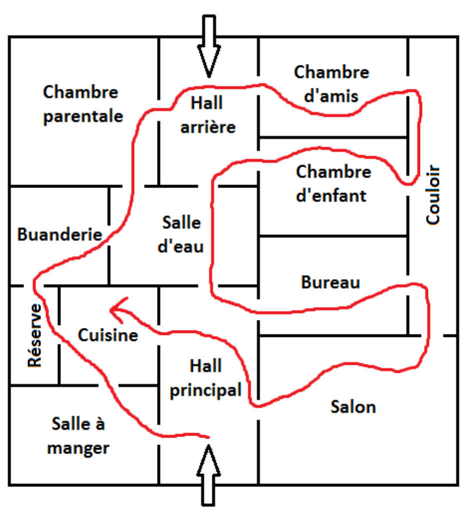


Quelle entrée doit-il choisir ?

C'est un problème similaire à ceux qui consistent à tracer un graphe sans lever le stylo et en ne passant qu'une fois par arête. Le graphe correspondant est le suivant :



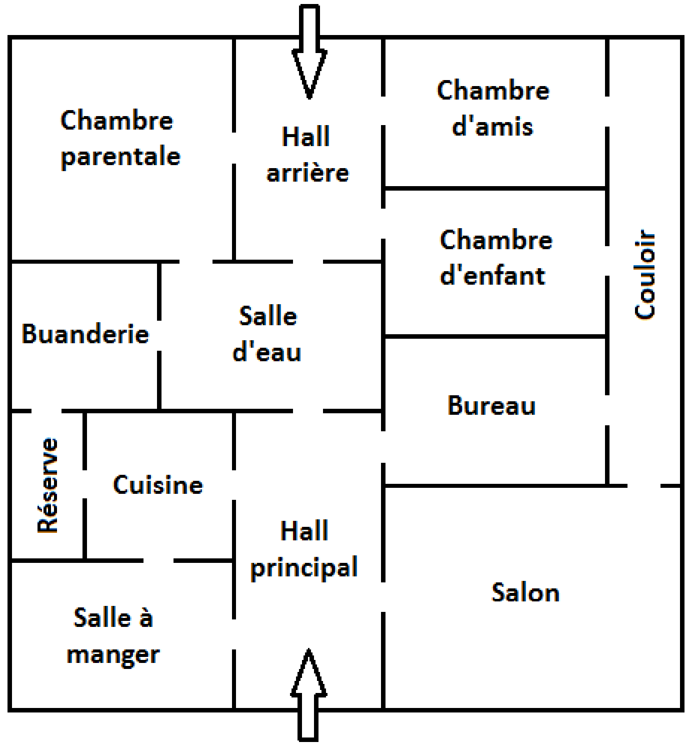
On remarque que ce graphe possède seulement deux nœuds dont partent un nombre impair d'arêtes (correspondants à la cuisine et au hall principal). Ainsi, il est possible de tracer ce graphe sans lever le stylo, mais seulement si on part d'un de ces deux points. Cela se voit facilement en remarquant que passer par un sommet sans y commencer ni s'y arrêter force à tracer deux arêtes (une pour l'aller et une pour le retour), ainsi si un sommet a un nombre impair d'arêtes il doit forcément être le début ou la fin du tracé.
Pour en revenir à notre voleur, il doit donc commencer par le hall principal et finira fatalement dans la cuisine.



Note : Par contre on dirait qu'il s'est creusé la tête pendant trop longtemps : la police arrive !

3.6 La capture du voleur

Marcel Patoulacci (agent de la paix avant tout) arrive sur les lieux d'un cambriolage. Il sait que le voleur n'a pas pu s'enfuir et fait condamner les deux seules sorties de la villa (représentées par des flèches).

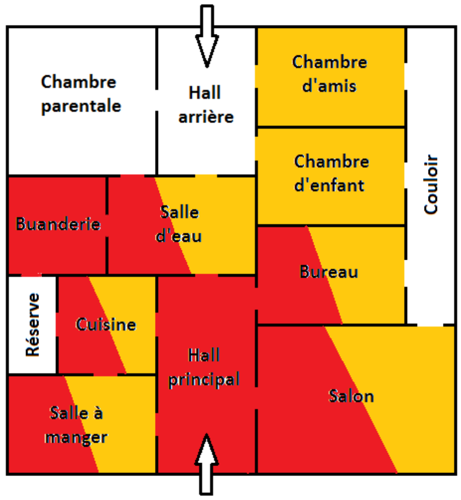


Ses sens de brigadier chef hors norme lui indique aussi les informations suivantes :

- Si le voleur passe trois portes, il peut se retrouver dans la cuisine.
- Le voleur ne peut pas atteindre la cuisine en passant une seule porte.
- Si le voleur passe deux portes, il peut se retrouver dans le bureau.
- Le voleur n'est pas dans le salon, la chambre parentale ou la cuisine.
- Si le voleur passe deux portes, il peut se retrouver dans la cuisine.
- Le voleur ne se trouve pas dans une pièce à quatre issues.

Dans quelle pièce est le voleur ?

Le plus simple c'est de colorier les cases qu'indiquent chaque indice.
En rouge : les salles à deux portes de la cuisine (qui, dans ce cas, sont toutes aussi à trois portes de la cuisine ; oui, le premier indice est inutile).
En orange : les salles à deux portes du bureau.

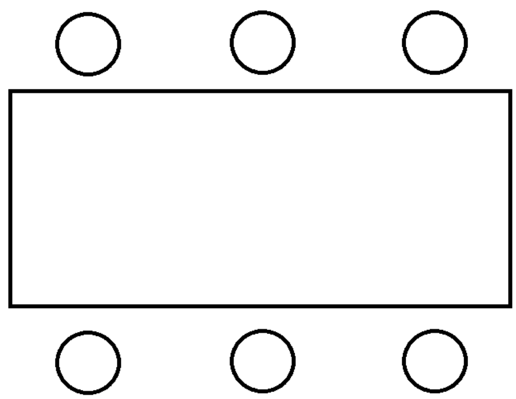


Attention à ne pas oublier de compter la cuisine et le bureau eux-mêmes (ils sont à deux portes d'eux-mêmes, deux fois la même). Le reste des indices permet d'exclure la salle à manger, puis le salon et la cuisine et enfin la salle d'eau.
Il ne reste que le bureau.
Note : C'est la deuxième fois que ce voleur se fait pincer par Marcel Patoulacci... En espérant que ça lui serve de leçon.

3.7 Placement complexe

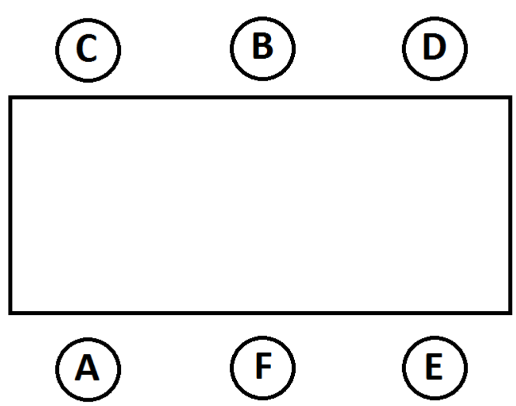
Gorg a réuni six de ses amis autour d'une table pour leur faire goûter ses dernières pâtisseries. Malheureusement pour lui, certains d'entre eux ne s'entendent pas du tout et il doit dresser un plan de table qui convienne à tout le monde.

- Azami refuse de s'asseoir à côté, en face ou en diagonale de Dagas. Elle ne veut pas non plus être à côté de Cressidus ou Boreas.
- Cressidus veut être à côté de Boreas.
- Dagas ne supporte ni Floren, ni Cressidus. Hors de question de les avoir à côté ou en face de lui !
- Electra voudrait être placée à côté ou en diagonale de Floren.
- Floren ne veut être en bout de table.
- Boreas veut juste manger.



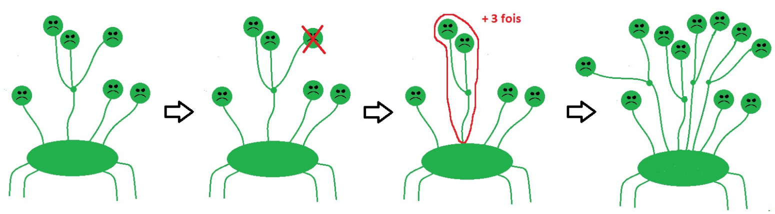
Quel plan de table convient à tout le monde ?

Le plus simple est de commencer par placer Dagas : il ne peut être en face ou à côté que de Boreas et Electra. On le place donc dans un coin.
Pour la suite on regarde en parallèle ce qu'il se passe si on place Boreas ou Electra à côté de Dagas.
Si on place Electra à côté de Dagas et Boreas en face, il faut nécessairement placer Cressidus à côté de Boreas et donc en face d'Electra. Les deux places centrales sont alors occupées par Electra et Cressidus, ce qui ne conviendra pas à Floren qui se retrouvera forcément en bout de table.
Il faut donc que Electra soit en face de Dagas et Boreas à côté. On doit alors placer Cressidus à côté de Boreas et Floren en face de Boreas. La dernière place revient alors à Azami.
On trouve alors le plan de table suivant et on vérifie qu'il convient à tout le monde.

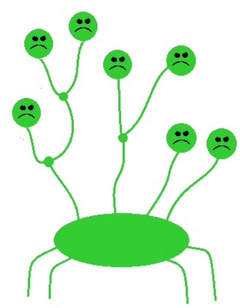


3.8 Face à l'hydre

Kirby et Paris sont dos au mur : ils doivent terrasser l'hydre qui se dresse face à eux si ils veulent lui échapper. Seulement cette hydre est très différente de celle de la mythologie grecque : celle-ci possède un corps imposant duquel partent plusieurs troncs, qui finissent par se ramifier en cous. Sur chacun de ces cous se trouve soit une tête, soit un nœud duquel partent d'autres cous. Seules ses têtes sont vulnérables et pour chaque tête éliminée, le cou auquel elle est attachée flétrit et meurt. Seulement, à chaque fois qu'une tête meurt, le tronc auquel elle était attachée se dédouble, et ce autant de fois qu'il y eu de têtes coupées. Par exemple, si deux têtes ont déjà été coupées, au moment de couper la troisième il va se passer ça :



Combien de coups au minimum faudra-t-il à Kirby et Paris pour éliminer l'hydre suivante :



L'idée globale est d'éliminer en priorité des têtes sur les troncs qui en ont le plus afin d'éviter de permettre à ces troncs de trop se dédoubler.
Il faut couper en premier une des têtes du tronc à 3 têtes, ce qui fait pousser un autre tronc à 2 têtes. On se retrouve alors avec trois troncs à 2 têtes qu'il faut réduire les uns après les autres, ce qui fait apparaître $2 + 3 + 4$ troncs à 1 tête.
Après 4 coups il reste donc 14 troncs avec une seule tête. La mort de chacune de ces têtes n'engendre aucun autre tronc, donc il suffit de 18 coups pour en finir avec cette hydre.
Note : Il existe un résultat qui dit que peu importe la taille ou la forme de l'hydre, on peut toujours l'éliminer en un nombre fini de coups, et ce même si on agit de façon aléatoire.
Pour ceux que ça intéresse, cherchez 'Hydre de Kirby-Paris'.

3.9 Discutions de comptoir

Dans un bar, huit personnes ont une discussion plutôt animée :

H'aanit : Tu verras Tressa, la maturité vient avec l'âge.

Ophilia : C'est vrai que Tressa est la plus jeune du groupe.

Tressa : Primrose et Alfyn sont à peine plus âgés que moi, tu sais. En plus ils ont le même âge.

Alfyn : Ce qui fait de nous les troisième plus jeunes, si j'ai bien compté.

Primrose : H'aanit et Cyrus ont le même âge aussi, non ?

Cyrus : Non, j'ai un an de plus qu'elle. Et cinq de plus que Thérion, même si je ne suis pas le doyen.

Therion : Je reste quand même plus âgé que vous quatre...

Olberic : Je me sens si vieux...

Saurez-vous classer ces huit personnes de la plus jeune à la plus âgée ?

On sait directement que Tressa est la plus jeune et que Alfyn et Primrose sont en troisième position.
On sait ensuite que Cyrus est plus âgé que H'aanit qui est elle même plus âgée que Therion qui est lui plus âgé que quatre personnes.
Comme on sait que Cyrus n'est pas le doyen, on a alors la suite suivante :
Tressa < ? < Alfyn = Primrose < Therion < H'aanit < Cyrus < ?
Pour déterminer si Ophilia ou Olberic est le doyen, on s'appuie sur ce que dit ce dernier. On trouve alors :
Tressa < Ophilia < Alfyn = Primrose < Therion < H'aanit < Cyrus < Olberic

4 Difficulté 4

4.1 Petits papiers au hasard

On écrit les chiffres 1, 2, 3, 4 sur quatre petits papiers que l'on place dans une boîte. Si l'on tire au hasard deux de ces papiers, quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres soit un multiple de trois ?

En tirant au hasard deux papiers nous avons 6 possibilités : $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$. Parmi ces possibilités, seules deux permettent d'obtenir une somme qui soit multiple de trois : $(1, 2)$ et $(2, 4)$. Nous avons donc une probabilité de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4.2 Méta-énigme

Florian veut réaliser le plus d'énigmes possible pour la fête des sciences mais il arrive petit à petit à court d'idées. Comme il lui faut une toute dernière énigme il a l'idée d'essayer de faire deviner combien d'énigmes il a rédigé cette année, en sachant que :

- Il a rédigé trois fois plus d'énigmes demandant de résoudre des équations que d'énigmes où il faut se repérer dans un flot d'informations (comme celle-ci).
- Il a rédigé trois fois plus d'énigmes demandant de résoudre des équations que d'énigmes de placement.
- Il a rédigé 5 énigmes graphiques.
- Il a rédigé deux fois moins d'énigmes consistant à classer des choses que d'énigmes de placement.
- Il a rédigé 2 énigmes de placement.
- Il a rédigé trois fois moins d'énigmes de probabilités que d'énigmes demandant de résoudre des équations.
- Il a rédigé autant d'énigmes de logique que d'énigmes graphiques.
- Il a rédigé 2 énigmes de plus qu'il ne parvient pas à classer.
- Chaque énigme est dans exactement une seule des catégories nommées précédemment.

Combien d'énigmes a rédigé Florian ?

Il suffit de recouper les informations pour trouver, dans l'ordre, 2 énigmes de placement, 6 énigmes demandant de résoudre des équations, 1 énigme consistant à classer des choses, 2 énigmes avec un flot d'informations, 2 énigmes de probabilité, 5 énigmes graphiques, 5 énigmes de logique et 2 énigmes inclassables.
Ce qui fait un total de 25 énigmes.
Note : Oui, j'avais vraiment plus d'idées...

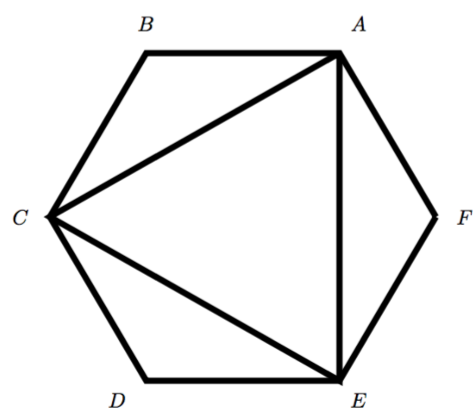
4.3 Les vacances d'Ernest

Ernest est parti en vacances durant quelques jours et il a noté qu'il a plu sept fois durant ses vacances. Quand il pleuvait le matin, le temps était clair l'après-midi. De plus, il n'a pas plu cinq après-midi et six matins. Combien de jours ont duré les vacances d'Ernest ?

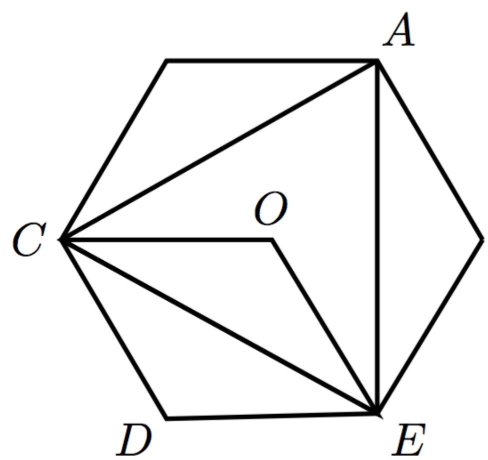
Désignons par n le nombre de jours de vacances. Il a plu $n-6$ matins et $n-5$ après-midi. Puisqu'il a plu sept fois et qu'il n'a jamais plu le matin et l'après-midi du même jour, nous avons $n-6+n-5=7$. Nous en déduisons que $n=9$, Ernest a pris neuf jours de vacances.

4.4 Rapport d'aire dans un Hexagone

Quel est le rapport entre l'aire du triangle ACE et l'aire de l'hexagone régulier $ABCDEF$?



Nous voyons dans la figure suivante que les triangles CDE et COE sont superposables. L'aire du triangle ACE est donc la moitié de l'aire de l'hexagone.



4.5 Contre-intuitif

Daraen a deux enfants. On sait que l'un des deux est une fille.

Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

On serait tenté de répondre 1/2 a priori, mais ce serait sans prendre en compte qu'on ne sait pas lequel des deux enfants est la fille.
Pour une fratrie de deux personnes, il y a quatre possibilités équiprobables : les deux sont des garçons, les deux sont des filles, le plus âgé est un garçon et l'autre est une fille et le plus âgé est une fille et l'autre est un garçon.
L'hypothèse invalide l'une des quatres possibilités, ramennant les probabilités des autres à 1/3. Il y a donc une probabilité de 2/3 pour que l'autre enfant soit un garçon.
Après coup cela est logique. Il est plus fréquent de rencontrer des fratries avec une fille et un garçon que des fratries de deux filles.

4.6 Vulran, je l'MMMMMM

Dans le calcul suivant chaque lettre correspond à un chiffre non nul et chaque chiffre n'est représenté que par une lettre.

VULRAN+VULRAN=LRANVU

LRANVU+VULRAN=ULRANV

ULRANV+VULRAN=ANVULR

ANVULR+VULRAN=NVULRA

NVULRA+VULRAN=RANVUL

RANVUL+VULRAN=MMMMMM

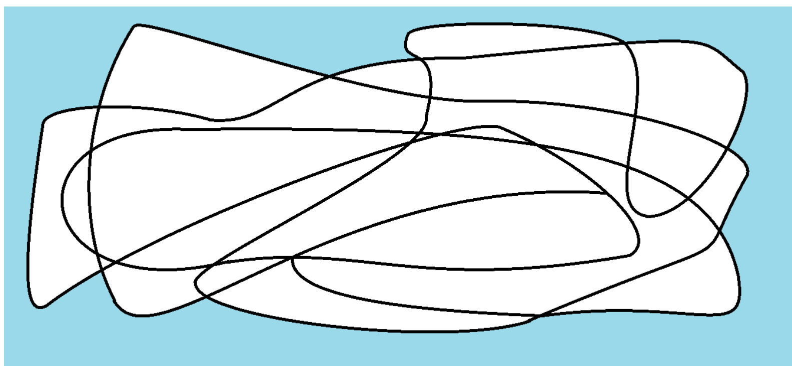
Quels chiffres se cachent derrière chacune des lettres ?

(Un petit indice : commencez par montrez que $x \times$VULRAN=MMMMMM.)

On trouve simplement que 7×VULRAN=MMMMMM. Il se trouve que 111111 est divisible par 7, cepandant il n'y a que pour les valeurs M$\in \{7, 8, 9\}$ que MMMMMM/7 est un nombre à six chiffres.
On écarte très rapidement le cas M=7 qui donnerait VULRAN=111111.
On écarte aussi le cas M=8 qui donne VULRAN=126984 car 2×VULRAN≠LRANVU.
Il ne reste que M=9 et VULRAN=142857, qui convient.

4.7 Peinture abstraite

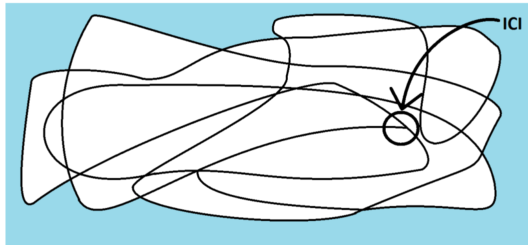
Un peintre aimerait colorier la figure suivante en utilisant le moins de couleurs différentes possible. Cependant, afin de garder intacte l'énergie dégagée par son œuvre, il souhaite que deux zones ayant un côté en commun aient des couleurs différentes, mais il autorise deux zones qui ne se touchent que par des sommets à avoir la même couleur.



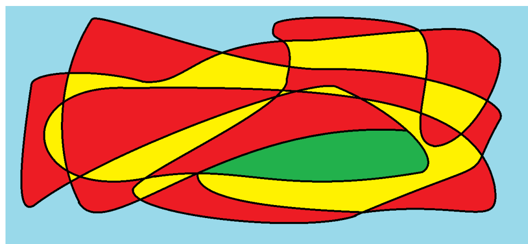
De combien de couleurs a-t-il besoin au minimum pour finir son œuvre ?

<u>Bonus :</u> En retirant une arête du dessin on peut utiliser une couleur de moins. De quelle arête il s'agit ?

Il faut nécessairement trois couleurs différentes. En effet, à un endroit du dessin il y a trois zones qui sont en contact par un côté, il faut forcément les peindre chacune d'une couleur différente.



On n'a pas besoin d'une quatrième couleur, on peut trouver facilement un coloriage à trois couleurs. Par exemple, on peut prendre une zone autre que les trois citées avant et la peindre en rouge. On peint alors en rouge toutes les zones qui ne partagent qu'un coin avec elle, et ainsi de suite jusqu'à ce que ce ne soit plus possible. On recommence en jaune avec une zone vierge jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une des trois zones problématiques, qu'on colorie en vert.



Les petits malins argumenteront que seules deux couleurs de peinture suffisent si on utilise le blanc de la feuille comme l'une des trois couleurs...
Quant à l'arête à enlever, il s'agit de celle qui délimite le haut de la zone verte (i.e. celle qui part vers la gauche dans le cercle du premier dessin). On peut alors colorier la zone verte en rouge : il n'y a plus que deux couleurs !
Note : Ce problème est un dérivé du théorème des quatre couleurs. Ce théorème assure qu'on peut toujours colorier une carte avec les contraintes de l'énoncé en utilisant seulement quatre couleurs.
Ce théorème fut le premier à faire intervenir un ordinateur dans sa démonstration (et on n'a toujours pas réussi à s'en passer pour le moment). Il fut conjecturé en 1852 par Francis Guthrie et il fallut attendre 1976 pour trouver une preuve. Cette démonstration scinda la communauté scientifique en soulevant la question suivante : Peut-on vraiment confier une preuve ou même une partie de preuve à un algorithme ?

4.8 L'âge de Bianca

Bianca a deux enfants : Nolan et Inga.

- Quand le plus jeune est né, Bianca avait 25 ans.
- Quand le plus jeune des deux aura l'âge de l'autre, Bianca sera deux fois plus âgée que Inga.
- Dans 5 ans, Bianca sera deux fois plus âgée que le plus âgé de ses enfants.
- Nolan n'est pas majeur.

Quel est l'âge de Bianca ?

Notons x l'âge de l'enfant le plus jeune, y celui du plus âgé et z celui de Bianca.
La première hypothèse donne $z = x + 25$. La troisième donne $z + 5 = 2y + 10$. Enfin, la deuxième donne

$$z + (y - x) = \begin{cases} 2y & \text{si Inga est la plus jeune} \\ \text{ou} & \\ 2(2y - x) & \text{si Inga est la plus âgée} \end{cases}$$

En remplaçant z par $25 + x$ on trouve alors

$$25 = \begin{cases} y & \text{si Inga est la plus jeune} \\ \text{ou} & \\ 3y - 2x & \text{si Inga est la plus âgée} \end{cases}$$

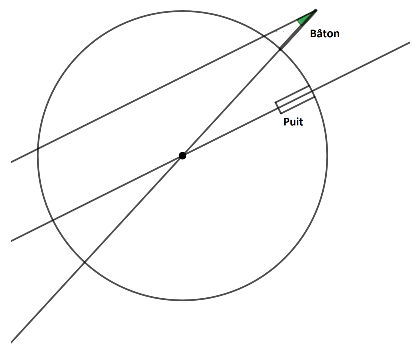
Comme on sait que Nolan n'est pas majeur, on en déduit que la première possibilité est impossible. On en déduit $2x = 3y - 25$.
Ainsi, $z = 25 + x = 25/2 + 3y/2$ donc $2z = 25 + 3y = 25 + 3(z - 5)/2$ d'où $4z = 45 + 3z$ et ainsi on trouve $z = 45$.
Note : En fait Nolan et Inga sont aussi les enfants de Gotha, c'est pour ça qu'on retrouve qu'ils ont 10 et 15 ans.

4.9 Eratosthène

Un jour où il s'ennuyait, un vieux sage du nom d'Eratosthène décide de calculer la circonférence de la Terre (rien que ça). Seulement à son époque, les satellites et les lunettes astronomiques n'existent pas, il décide alors de n'utiliser qu'un bâton et un chameau (rien que ça !). Il a remarqué qu'au solstice d'été, au moment où le soleil est le plus haut, dans son village natal les rayons du soleil traversent le puit central sans qu'aucune ombre soit projetée, il en conclue qu'à cette date le puit est pile sur le segment qui relie le centre de la Terre et le centre du Soleil. Il décide alors de se rendre à Alexandrie, au nord de son village natal et d'y planter un bâton à la verticale le jour du solstice d'été. Ce bâton de 1m dessine alors une ombre de 12,6cm. Il demande ensuite à un ami de mesurer la distance entre son village natal et Alexandrie en comptant les pas d'un chameau à qui il fait faire le trajet. Il trouve une distance de 1.000.000 pas environ.

Combien mesure la circonférence de la Terre en pas de chameau ?

On s'appuie sur la figure suivante :



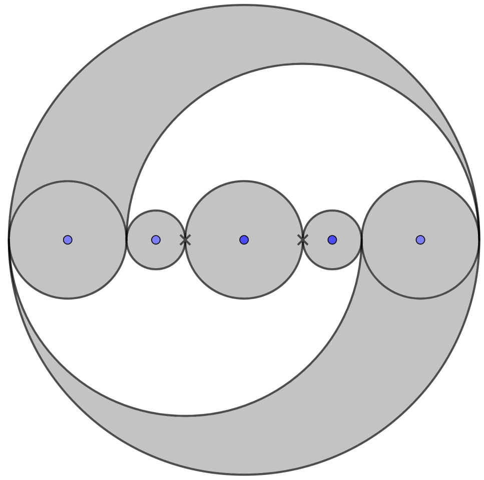
L'hypothèse sur le puit assure que le rayon du soleil qui passe par le puit peut se prolonger jusqu'au centre de la Terre.
Les informations qu'on a sur le bâton permettent de calculer par trigonométrie l'angle vert, qui fait 7,2° soit 1/50 tour. On sait alors par la propriété des angles alternes-internes que l'angle associé à l'arc de cercle entre le puit et le bâton est de 1/50 tour.
Pour trouver la circonférence de la Terre, il suffit de multiplier la longueur d'arc entre le puit et le bâton par 50. On trouve alors 50.000.000 pas.
Note : C'est exactement de cette façon que le savant grec Eratosthène a estimé la circonférence de la Terre au IIIème siècle avant J.C.. Les résultats exacts de son expérience ne sont pas connus (essentiellement dû au fait qu'on ne sait pas précisément quelle est la valeur exacte du 'stade' qu'il utilise comme unité de mesure ; on pense que c'est le stade égyptien) mais on estime qu'il se serait trompé de seulement 650 km environ, soit 1.6%.

5 Difficulté 5

5.1 Crop circle

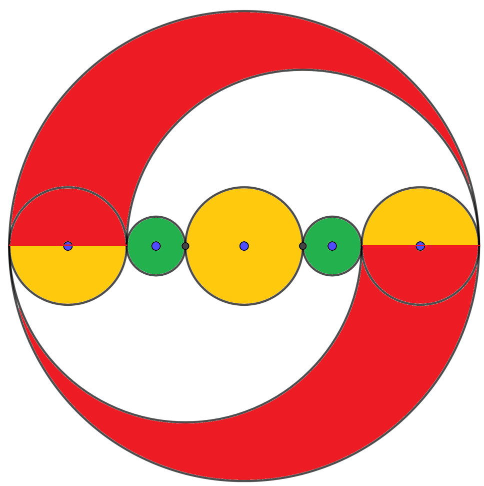
Un agriculteur de la région de Sarraltroff découvre un matin que quelqu'un a réalisé un cercle de culture dans son champ de blé. Passé l'énervement initial, il décide d'estimer combien d'argent ce dessin lui fait perdre.

Sur la figure suivante la zone grisée représente le blé couché. Les points rond sont tous alignés et sont les centres des cercles complets. Les croix sont à l'intersection de deux cercles et sont les centres des deux demi-cercles. Enfin, les diamètres des cercles sont 10m pour les petits et 20m pour les grands.



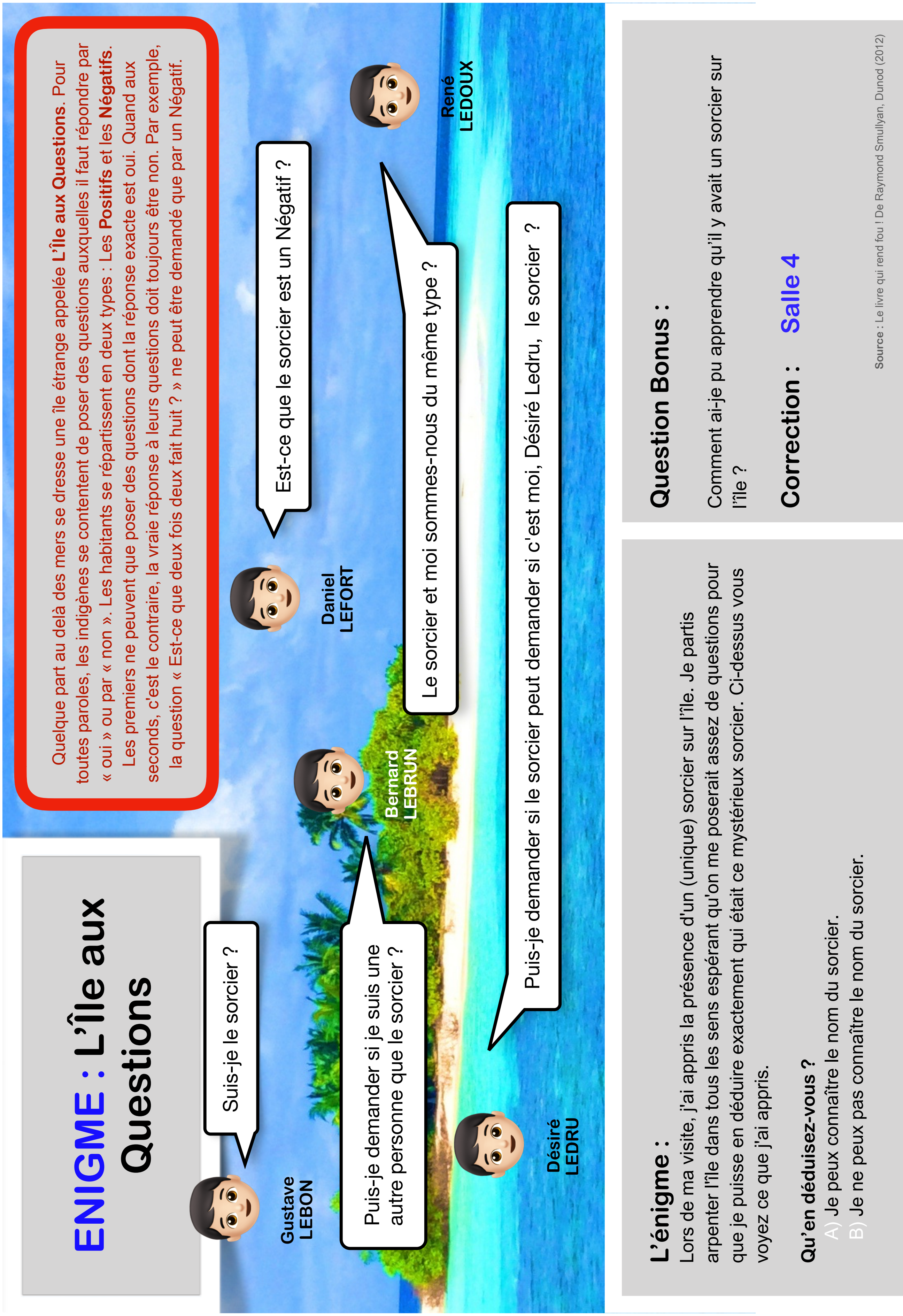
Quelle surface l'agriculteur a-t-il perdue ?

Il faut découper la figure en plusieurs parties simples à étudier.



L'aire de la partie rouge est simplement la différence entre l'aire d'un disque de rayon $\frac{20+10+20+10+20}{2} = 40$ et l'aire d'un disque de rayon $\frac{20+10+20+10}{2} = 30$, soit $\pi(40^2 - 30^2) = 700\pi$.
L'aire de la partie orange est deux fois l'aire d'un disque de rayon 10, soit 200π.
L'aire de la partie verte est deux fois l'aire d'un disque de rayon 5, soit 50π.
L'aire totale de la figure est donc de $950\pi\text{m}^2$.
<u>Note :</u> Ce pauvre agriculteur a donc perdu près de 3ha de blé. Farceurs ou extraterrestres, ils n'en restent pas moins irrespecteux.

5.2 Ille aux questions



- Il faut d'abord déterminer le type du sorcier. On peut le déduire d'exactement une des questions.
- Soit Q n'importe quelle question. Quelqu'un, dont on ne connais pas le type, pose la question "Puis-je demander Q ?". Que peut-on en déduire sur la valeur de vérité de Q ?
- René Ledoux demande s'il est du même type que le sorcier. Si René est Positif, cela implique que le sorcier est Positif. Si René est Négatif, alors le sorcier est Positif. Dans les deux cas, le sorcier est Positif.
- Notons Q_1 :="Désiré Ledru est-il le sorcier ?" et Q_2 :="Le sorcier peut-il demander Q_1 ?" Désiré demande s'il peut demander Q_2.
  Si Désiré est Positif, alors il peut demander Q_2. Cela implique que Q_2 est vrai.
  Si Désiré est Négatif, alors il ne peut pas demander Q_2. Cela implique que Q_2 est vrai.
  Dans les deux cas, Q_2 est vrai. Donc Q_2 est vrai.
- Nous savons maintenant que le sorcier est Positif et a le droit de demander Q_1. Cela implique que Q_1 est vrai. Donc c'est Désiré Ledru le sorcier.

5.3 La stratégie gagnante

Lora et Jin veulent jouer à un nouveau jeu qui se joue à l'aide d'un paquet de 38 cartes numérotées de 1 à 38, réparties en deux paquets : un avec les cartes paires et un autre avec les cartes impaires.

Le joueur qui prend le paquet pair commence à jouer. Il doit alors jouer une carte de son choix dans son paquet. L'autre joueur joue ensuite une carte de son paquet et le joueur qui a placé la carte avec la plus forte valeur gagne un point, écarte les cartes jouées puis doit jouer en premier pour la manche suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les cartes soient jouées.

Jin laisse à Lora le choix de la personne qui commence.

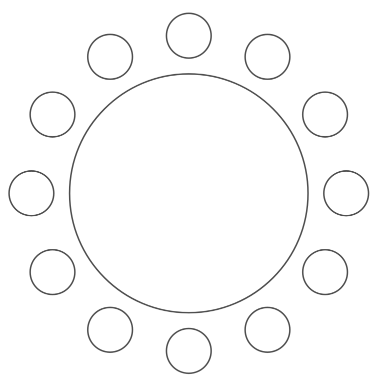
Que doit faire Lora pour être sûre de gagner ?

On va appeller J1 la personne qui commence et J2 l'autre personne. On commence à regarder ce qu'il se passe si il n'y a que deux cartes dans le jeu. Dans ce cas le J1, qui a la meilleure carte, gagne avec le score de 1 à 0.
Si il y a quatre cartes dans le jeu, peu importe la carte que joue en premier le J1, le J2 peut s'arranger pour terminer sur une égalité. En effet, si le J1 joue le 2 en premier le J2 doit mettre le 3 par dessus et si le J1 joue le 4 le J2 doit jouer le 1 pour pouvoir gagner la deuxième manche.
L'idée est alors de remarquer que le J1 peut s'arranger pour gagner si le nombre de cartes n'est pas multiple de 4 en se ramenant par récurrence au cas où il n'y a que deux cartes. On peut aussi montrer que si le nombre de cartes est multiple de 4 le J1 peut forcer l'égalité, en se ramenant par récurrence au cas où il y a 4 cartes dans le paquet.
On montre ce résultat par récurrence sur n, avec $2n$ le nombre de cartes dans le paquet. L'initialisation est déjà faite, passons à l'hérédité.
On suppose le résultat prouvé pour tout $i < n = 2k$. Dans ce cas le J1 doit jouer la carte avec le numéro 2, ainsi le J2 est forcé de jouer le 3. En effet, si le J2 joue le 1 il ne reste alors que les cartes 3 à 2n et c'est au J1 de commencer : on se retrouve dans une situation équivalente au cas où il y a $2(n-1)$ cartes dans le jeu, et on sait que dans ce cas le J1 gagne. Le J2 doit donc jouer le 3. Une fois cette première manche jouée, peu importe la carte jouée par le J2, le J1 aura toujours la carte strictement supérieure (ou le 4 si le J2 joue le 1). A la fin de ces deux premières manches le score est de 1-1 et la situation du jeu est maintenant équivalente au cas où il y a $2(n-2)$ cartes dans le jeu, ce qui montre par récurrence qu'on aboutit à une égalité, si les deux joueurs jouent de façon optimale.
On suppose à présent le résultat prouvé pour tout $i < n = 2k+1$. Dans ce cas le raisonement est exactement le même que le précédent et on se retrouve après deux manche avec un score de 1-1 et une situation équivalente à celle où il y a $2(n-2)$ cartes dans le paquet, qui donne le J1 vainqueur par récurrence.
Dans le cas du jeu de Lora et Jin, on sait que $38{=}4{\times}9{+}2$. On est donc dans un cas où le premier joueur peut gagner si il joue de façon optimale. Lora doit donc choisir de commencer.
Note : Ca rend le jeu beaucoup moins intéressant de savoir que le premier à jouer gagne à coup sûr...

5.4 Placement très complexe

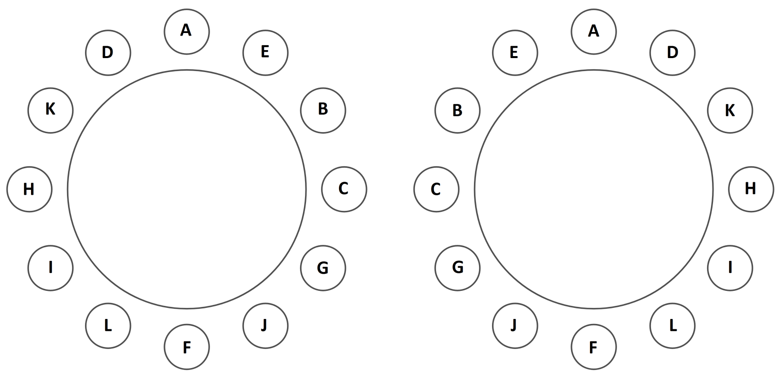
Suite à une récente paix entre les royaumes de Nohr et Hoshido, une grande réunion est organisée entre différentes personnes haut placées des deux pays. Ils sont douze et doivent se placer autour d'une table ronde en prenant en compte les préférences de chacun.

- Azura aimerait que elle et les représentantes des deux royaumes soient chacune à un point cardinal.
- Benny doit se tenir juste à côté de Camilla pour assurer sa protection.
- Camilla est la représentante de Nohr et souhaite faire face à la représentante d'Hoshido.
- Dwyer ne veut être à côté ni de Benny, ni d'Izana, ni de Gunter et surtout pas de son père.
- Elise veut à tout prix être aux côtés d'une de ses sœurs : Azura et Camilla.
- Fuga veut être à trois places d'Hinoka.
- Gunter doit être à moins de deux places de Camilla mais loin d'Azura.
- Hinoka, la représentante d'Hoshido, veut n'avoir à ses côtés que Azura, Fuga, Izana ou Kaze.
- Izana ne veut pas s'éloigner de Fuga de plus de deux places.
- Jakob veut être placé juste en face de son fils Dwyer pour garder un œil sur lui.
- Kaze refuse de se tenir face à Benny.
- Leo veut juste en finir avec ce placement BEAUCOUP trop long...



Quel plan de table choisir ?

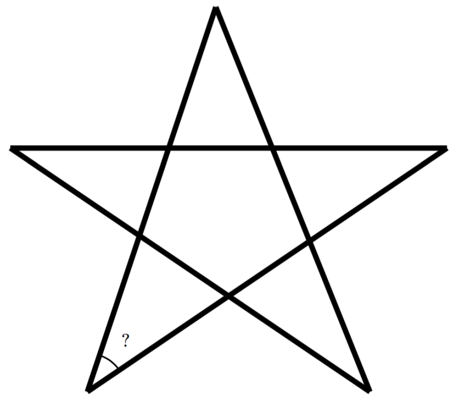
Le plus dur est de trouver par quelles informations commencer. (Un petit conseil, faites un petit dessin ou référez-vous au schéma à la fin en parallèle des explications. C'est sacrément prise de tête sinon...)
Les premiers à placer sont Azura, Hinoka, Camilla et Fuga. En effet, comme Azura impose qu'elle, Hinoka et Camilla soient chacune à un point cardinal, Fuga étant à trois places d'Hinoka est forcément placé sur le quatrième point cardinal. On sait ensuite par Camilla qu'elle et Hinoka doivent se faire face, ce qui fixe ces quatre personnes (à symétrie axiale et rotation près).
Ensuite il faut se pencher sur ce que dit Hinoka. Parmis les quatre personnes qu'elle veut à ses côtés il n'y en a que deux qui ne sont pas placées : Izana et Kaze. Or Izana nous dit qu'il veut être près de Fuga, ce qui le fixe ainsi que Kaze.
On peut ensuite placer Benny : il doit être à côté de Camilla mais Kaze refuse de l'avoir en face, il faut donc le placer en face d'Izana.
La suite est plus complexe. Pour continuer il faut remarquer que la place entre Fuga et Izana ne convient qu'à Leo. En effet, Dwyer ne veut pas être à côté d'Izana, Jakob doit être en face de Dwyer mais comme ce dernier ne peut pas être à côté de Benny la place entre Fuga et Izana ne peut pas être attribuée à Jakob, Elise ne serait pas à côté d'une de ses sœurs et Gunter serait trop loin de Camilla. On place donc Leo entre Fuga et Izana.
Il ne reste plus que quatre places, dont seulement deux sont diamétralement opposées (celle entre Kaze et Azura et celle vacante à côté de Fuga), ce sont donc les places de Jakob et Dwyer. On peut alors placer Gunter parmis les deux places qui restent. Comme il doit rester loin d'Azura, on le place juste à côté de Camilla. Puis on place Elise sur la dernière place, entre Azura et Benny.
Pour finir, comme Dwyer ne veut pas être à côté de Gunter, on le place entre Kaze et Azura et on place Jakob entre Fuga et Gunter.
OUF !



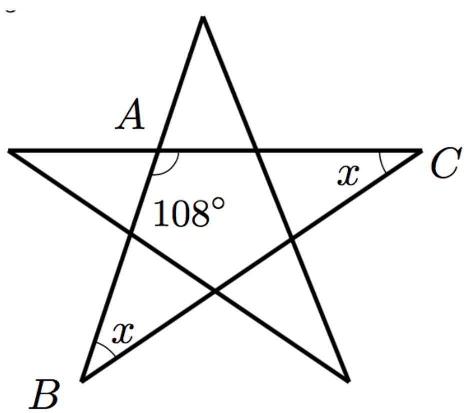
(Ce sont les deux seules solutions possibles à rotation près. Pour la correction vous pouvez prendre la feuille du visiteur, la tourner jusqu'à ce que le A soit placé en haut puis vous n'avez qu'à comparer aux deux dessins. Ca évitera peut-être à certains de se faire des nœuds au cerveau...)
Note : On remercie Leo de s'être assis sur ses préférences. Sans ça ils seraient en train de se chamailler comme des sauvages...

5.5 Etoile à 5 branches

Combien mesure l'angle intérieur indiqué de l'étoile régulière à 5 branches ?



Le pentagone intérieur est régulier, son angle intérieur[a] est donc de $\frac{180° \times 5 - 360°}{5} = 108°$.



Le triangle ABC est isocèle en A. Par conséquent[b], $108° + 2x = 180°$, donc $x = 36°$.

[a]Voir en annexe le théorème **??**.
[b]Voir en annexe le théorème **??**.

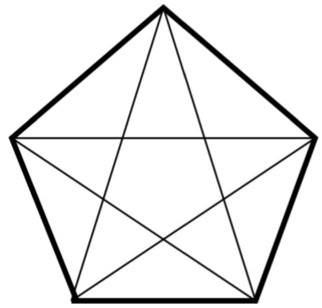
5.6 Nombre miroir

On définit le "miroir" d'un nombre entier à deux chiffres comme le nombre obtenu en permutant ses deux chiffres (par exemple, le "miroir" de 34 est 43). Combien de nombres entiers à deux chiffres sont tels que que si l'on ajoute le nombre à son "miroir", on obtient un nombre entier au carré ?

Un nombre entier à deux chiffres s'écrit $10a + b$ avec a et b ses chiffres. Lorsqu'on le lit à l'envers, on obtient alors $10b + a$: on cherche donc tous les couples (a, b) tels que $10a + b + 10b + a = 11 \times (a + b)$ soit un carré. On doit donc avoir $11 \times (a + b) = k^2$ pour un certain entier k. Cependant, les entiers a et b sont compris entre 0 et 9 donc $a + b \leq 18$ et la seule possibilité pour que $11 \times (a + b)$ soit un carré est que $a + b$ soit égal à 11. Finalement, les 8 nombres possibles sont donc 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 et 92.

5.7 Triangles isocèles dans pintagone

Combien peut-on former de triangles isocèles dont les sommets sont des sommets d'un pentagone régulier ?



Il y a $\binom{5}{3} = 10$ manières de former un triangle avec les 5 sommets d'un pentagone. Vérifions que chacune d'entre elles forme un triangle isocèle.
Comme il n'y a que 5 sommets sur un pentagone, deux des sommets choisis pour être des sommets du triangle sont nécessairement adjacents. Appelons A et B deux tels sommets. Il y a alors deux cas à considérer :

- Le troisième sommet C peut également être adjacent à A ou à B. Supposons qu'il soit adjacent à B (l'autre cas est similaire), de telle sorte que A, B et C sont trois sommets consécutifs du pentagone. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle en B.
- Le troisième sommet C peut n'être adjacent ni à A ni à B. Il s'agit alors du sommet du pentagone qui est opposé au côté $[AB]$. Les segments $[AC]$ et $[BC]$ sont alors deux diagonales du pentagone. Ils sont donc de même longueur, ce qui prouve que ABC est isocèle en C.

Ainsi, tous les triangles dont les sommets sont des sommets du pentagone sont isocèles, ce qui prouve qu'il y a 10 tels triangles.

5.8 Chers voisins

Marie vit dans un petit village d'à peine 100 habitants.

Quelle est la probabilité qu'un autre habitant ait la même date de naissance qu'elle ?

On calcule plutôt le complémentaire de cette probabilité : quelle est la probabilité qu'aucun habitant partage la date de naissance de Marie ?
La probabilité qu'un seul habitant ne partage pas le même anniversaire que Marie est de 364/365 (ou 365/366 si on veut...). On déduit alors que la probabilité qu'aucun habitant ne fête son anniversaire en même temps que Marie est de $(364/365)^{100}$.
On trouve alors la probabilité que Marie partage sa date d'anniversaire avec un autre habitant : $1 - (364/365)^{100}$ soit environ 24%.

6 Difficulté 6

Indices

- Faire d'abord le raisonnement pour le cas où il y aurait une seule feuille violette.
(À 8h10 l'unique personne avec une feuille violette sort, puis à 8h15 tous les autres sortent simultanément. Pourquoi ?)
- Puis avec deux feuilles violettes.

- Imaginons qu'il y a une seule feuille violette. D'après la remarque du prof, il y a au moins une violette. L'étudiant possédant cette feuille sait alors que sa feuille doit être violette, puisque toutes celles qu'il voit sont jaunes. Cinq minutes minutes plus tard, il partira à la scolarité. Tous les autres font alors le raisonnement suivant : La personne qui vient de sortir savait à 8h05 quelle avait une feuille violette. La seule manière dont elle a pu savoir cela instantanément, est qu'il n'y a pas d'autre feuille violette. En particulier, ma feuille doit être jaune. Les 42 étudiants partent donc à 8h15.
- Imaginons qu'il y a deux feuilles violettes. Les étudiants les possédant voient chacun une autre feuille violette. Donc ils se disent que soit l'autre est le seul avec une feuille violette, soit c'est nous deux. Cinq minutes après la remarque du prof, rien ne se passe. Donc ces deux-là savent que l'autre n'était pas le seul. Encore cinq minutes après, ils partent tous les deux à la scolarité. Encore cinq minutes après, tous les autres s'y rendent.
- Maintenant le cas avec trois feuilles violettes. Rien ne se passera durant les dix premières minutes après la remarque du prof. À ce moment là, les trois sont au courant et partent au bout de quinze minutes à la scolarité. Cinq minutes plus tard, les autres les rejoignent. Au total, l'examen dure 25 minutes (5 minutes jusqu'à la remarque du prof, plus 20 minutes).

Quelle est l'information supplémentaire introduit par la remarque du prof dans chacun de ces cas ?

- Dans le premier cas, une personne ne savait pas, avant la remarque du prof, qu'il y avait au moins une feuille violette. Après la remarque, tout le monde sait qu'il y a au moins une feuille violette.
- Dans le deuxième cas, avant la remarque, tout le monde savait déjà qu'il y a au moins une feuille violette. Mais ils ne savaient pas tous que tout le monde savait qu'il y avait au moins une feuille violette.
- Dans le troisème cas, avant la remarque, tout le monde savait déjà qu'il y a au moins une feuille violette. Tout le monde savait même que tout les monde savait qu'il y avait au moins une feuille violette. Mais ils ne savaient pas tous que tout le monde savait que tout les monde savait qu'il y avait au moins une feuille violette.

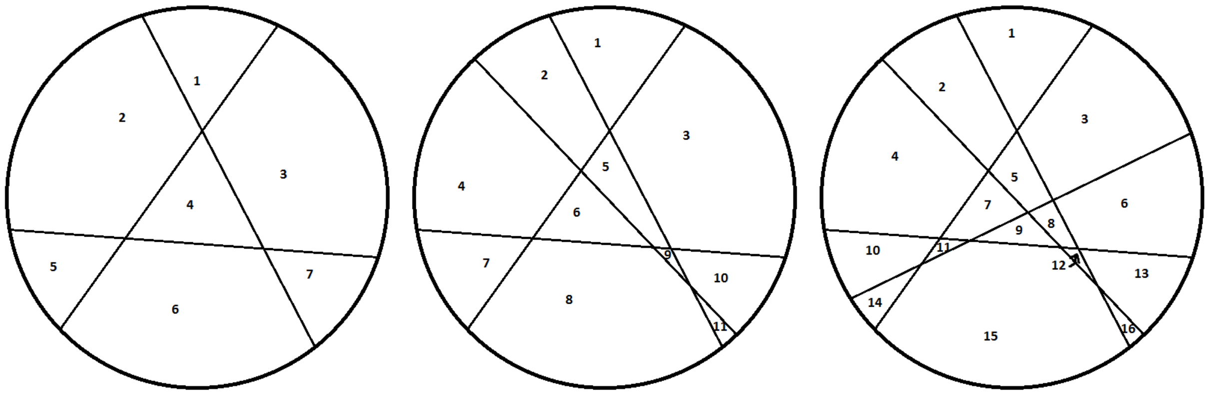
6.1 The cake is a lie !

GLaDOS cherche à couper un gâteau, mais elle ne s'autorise que trois coups de couteau rectilignes. Combien de parts peut-elle ainsi faire au maximum ?

Et avec quatre coups ? Et cinq ?

<u>Bonus :</u> Combien de parts peut-elle faire avec n coups de couteau ?

Avec trois coups de couteau on peut arriver à 7 parts, 11 avec quatre coups et 16 avec cinq (après les figures deviennent très laides).



La formule générale pour n coups de couteaux est la suivante :

$$\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

On la montre par récurence sur n. Le cas $n=1$ est trivial.
Si on suppose la formule vraie au rang $n-1$, on fixe un découpage en $n-1$ coups qui réalise le nombre maximal de parts. Dans ce cas, le n-ième coup de couteau intersectera au plus $n-1$ lignes désinées par les coups précédents. On note E l'ensemble des points d'intersection avec une ligne déjà déssinée ou avec le cercle. On remarque alors qu'à chaque paire de points consécutifs de E on dédouble une part déjà existante. Réciproquement, chaque part dédoublée par le n-ième coup de couteau correspond à une paire de points consécutifs de E. Ainsi, on rajoute autant de parts que de paires de points consécutifs de E.
Le nombre maximal de points de E est $n+1$ (2 points du cercle et 1 point pour chacun des $n-1$ coups de couteau déjà donnés ; on pourra toujours le faire, quitte à avoir deux points d'intersections très proches mais distincts). Le nombre de paires de points consécutifs de E est alors n : on rajoute n parts au maximum avec le n-ième coup de couteau. Comme $(n-1)n/2+n=n(n+1)/2$, la formule est donc vérifiée.
Note : Tout cela est bien joli, mais n'acceptez jamais un gâteau de la part de GLaDOS !

6.2 Enigme logique

ENIGME

L'examen de Logique avancée

Ce matin à **8h** a commencé en salle C 65 l'examen du module « Logique avancée » . En début de l'épreuve, la totalité des 43 étudiants inscrits étaient présents. Les modalités de l'épreuve sont très particulières :

* Il n'y a pas de copie à rendre.

* À partir du moment où tous les étudiants ont répondu juste, tout le monde a 20/20 et peut aller participer à la fête des licences.

* Si ce moment ne s'est pas produit avant 21h ce soir, l'examen est déclaré non valide et un nouvel examen de difficulté égale sera proposé demain.

Voici l'**énoncé de l'examen** :

> **Exercice (20 p)**
>
> Le dos de cette fiche d'examen cartonnée est coloriée en jaune ou en violet. Soulevez-la de sorte que tous les autres étudiants inscrits la voient sauf vous.
>
> **Question :** Quelle est la couleur du dos de votre fiche d'examen ?
>
> Dès que vous connaissez la réponse à la question, vous disposez de cinq minutes pour préparer mentalement un argumentaire justifiant que vous avez obtenu votre réponse sans tricher, c'est-à-dire sans regarder le dos de votre feuille et sans communiquer avec les autres étudiants. Rendez-vous ensuite à la scolarité pour présenter votre réponse.

A **8h05**, lorsque tous les étudiants ont montré le dos de leur copie aux autres, le professeur surveillant a émis un soupir nostalgique et a dit

« Moi aussi, à l'époque où je passais cet examen, j'avais une feuille violette ».

L'énigme :

Je vais vous donner un indice dont ne disposaient pas les étudiants inscrits à cette épreuve : au total, il y avait **3 feuilles violettes et 40 feuilles jaunes**. Sachant que ces 43 étudiants sont non-tricheurs et très intelligents (ils savent instantanément tout ce qu'ils peuvent savoir), prudents (ils respectent tous pointilleusement les 5 minutes de réflexion) et impatients (ils veulent à tout prix éviter de devoir repasser l'examen), où sont-ils maintenant ?

A) En salle C65.

B) En train de célébrer leur réussite à l'examen.

Questions bonus :

Au bout de combien de temps se terminerait l'examen s'il y avait une seule feuille violette ? Et s'il y en avait deux ?

Dans notre cas de 3 feuilles violettes, combien de temps dure l'examen ?

Quelle est l'information complémentaire introduit par la remarque du professeur dans chacun de ces cas ?

Correction : Station 1

6.3 Escalier mécanique

Pierre et Louis montent en marchant un escalier mécanique en mouvement. Lorsque Pierre arrive en haut de l'escalier, il a monté 21 marches alors que Louis, avec une vitesse double de celle de Pierre, en a monté 28. Combien de marches l'escalier possède-t-il au repos ?

Désignons par x le nombre total de marches que possède l'escalier mécanique au repos et par t le temps nécessaire à une marche pour passer d'une position à la suivante. De cette manière, une personne au repos (sans action de sa part) mettra un temps xt à monter l'escalier. Puisque Pierre monte 21 marches, il arrive en haut en un temps égal à $(x-21)t$ et pour monter une marche il a pris un temps égal à $\frac{(x-21)t}{21}$. D'une façon similaire, le temps pris par Louis pour monter chaque marche est $\frac{(x-28)t}{28}$. Puisque la vitesse de Louis est le double de celle de Pierre, le temps pris par Pierre pour monter une marche est le double de celui pris par Louis. Nous avons donc :

$$\frac{(x-21)t}{21} = \frac{2(x-28)t}{28}$$

d'où :

$$\frac{x-21}{21} = \frac{x-28}{14}.$$

En résolvant cette équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 14(x-21) &= 21(x-28) \\ 2(x-21) &= 3(x-28) \\ 2x-42 &= 3x-84 \\ x &= 42. \end{aligned}$$

Ainsi, l'escalier mécanique possède 42 marches.

6.4 Qui est Balance

Chez les Martin vivent : M. et Mme Martin, leur fils, la sœur de M. Martin et le père de Mme Martin. En les appelant par leurs signes astrologiques, on sait que Lion et Taureau ne sont pas liés par le sang, que Bélier est plus jeune que sa belle-sœur mais plus vieux que Taureau et que Cancer est plus vieux que Balance. Qui est Balance ?

Nous allons voir que c'est le fils Martin. Commençons par remarquer qu'il est le plus jeune de la maison. Vu les relations de parenté, le plus jeune de la maison ne peut en effet être que le fils Martin ou la sœur de M. Martin.
Or, la question assure que Bélier est plus jeune que sa belle-sœur. Seules les deux femmes ont une belle-sœur, donc Bélier est la femme la plus jeune, et elle est tout de même plus vieille que Taureau. Cela prouve que la personne la plus jeune de la maison est un homme, et c'est donc le fils Martin.
Cela détermine son signe : il ne peut en effet être ni Cancer, ni Bélier (qui ne sont pas les plus jeunes), ni Lion ni Taureau (car le fils Martin est relié par le sang à tous les autres habitants de la maison), donc il est Balance.

6.5 Ballon de foot

Un ballon de football est formé de 32 panneaux de cuir, dont 20 sont des hexagones réguliers et 12 des pentagones réguliers. Combien de coutures doit-on réaliser et combien de coins obtient-on ?

Les $20 \times 6 = 120$ côtés des hexagones et les $12 \times 5 = 60$ côtés des pentagones constituent ensemble 180 côtés, que l'on devra coudre deux à deux : on devra donc réaliser $\frac{180}{2} = 90$ coutures.
Par ailleurs, chaque « coin » du ballon est au croisement de deux hexagones et d'un pentagone. Pour les compter, il faut donc diviser le nombre total de sommets des hexagones et des pentagones (il y en a en tout $20 \times 6 + 12 \times 5 = 180$) par 3 : il y a donc 60 coins.

6.6 Des couples jouent aux fléchettes

Emma, Anna, Sophie, Pierre, Victor et Louis jouent aux fléchettes. Le nombre de points que chacun a remporté est égal au carré du nombre de fois qu'il a tiré. Emma a joué 7 coups de plus que Louis et Victor a joué 15 coups de plus que Sophie. Si la différence de point dans chaque couple est de 45, quel garçon est le compagnon de Sophie ?

Notons par E, A, S, P, V et L le nombre de tirs effectués respectivement par Emma, Anna, Sophie, Pierre, Victor et Louis.

$$\begin{aligned} V &= S + 15 \qquad (1) \\ L &= E - 7. \qquad (2) \end{aligned}$$

Si, dans un couple, x est le nombre de tirs effectués par une fille et si y est le nombre de tirs de son compagnon, alors ils ont gagné respectivement x^2 et y^2 points donc :

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 45 = 5 \cdot 3^2. \qquad (3)$$

Comme x et y sont entiers, les possibilités sont :

$$\begin{cases} x+y &= 9 \\ x-y &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 7 \\ y &= 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y &= 15 \\ x-y &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 9 \\ y &= 6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y &= 45 \\ x-y &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 23 \\ y &= 22. \end{cases}$$

Si Sophie a effectué 9 ou 23 tirs, d'après l'équation (1), Victor a tiré 24 ou 38 fois : ces deux valeurs ne sont pas des valeurs de y données ci-dessus. Sophie a tiré donc 7 fois et Victor 22 fois. Ensuite, si Emma avait tiré 23 fois alors d'après l'équation (2), Louis aurait tiré 16 fois, ce qui n'est pas une valeur de y autorisée. De même si Emma avait tiré 7 fois. Emma a donc effectué 9 tirs et Louis en a effectué $9 - 7 = 2$. Par conséquent, le compagnon de Sophie est Louis.

6.7 La naissance de l'ermite

Le vieux Bernard vit en ermite au fin fond d'une forêt et les habitants du village voisin se posent de nombreuses questions quant à sa date de naissance exacte. Voici les informations qu'ils ont pu trouver :

- Bernard est né entre 1900 et 1999.
- Le dernier chiffre de son année de naissance est impair.
- Il est né durant l'hiver, entre novembre et février.
- Il est né un jeudi.
- Son jour de naissance est dans la deuxième moitié du mois.
- Son mois de naissance a 31 jours.
- Il faut multiplier son mois de naissance par 2 pour trouver son jour de naissance.
- Il a plus de 95 ans.
- Le 31 décembre 1900 était un lundi.

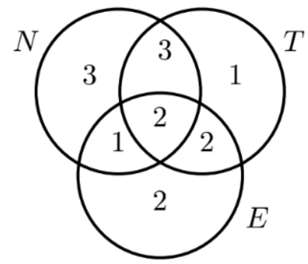
Quand est né Bernard l'ermite ?

On va essayer de recouper les informations dans l'ordre :
On commence par déterminer le mois. On sait qu'il est entre novembre et février et qu'il a 31 jours, c'est donc soit décembre soit janvier. On sait aussi que son jour de naissance est donné par le double du numéro du mois de naissance, donc il est né un 2 janvier ou un 24 décembre.
Concernant le jour de naissance, on sait aussi qu'il est dans la deuxième moitié du mois, donc supérieur à 15. Ainsi, Bernard est né un 24 décembre.
Reste à déterminer l'année. On sait qu'il est né après 1900 et avant 1923 (comme il a plus de 95 ans en 2018). Comme on sait qu'il est né un jeudi, il reste à déterminer en quelles années le 24 décembre était un jeudi.
On sait que le 31 décembre 1900 était un lundi, donc le 24 décembre 1900 était un lundi aussi. Ensuite, on sait que $365 = 7 \times 52 + 1$ donc le 24 décembre 1901 était un mardi. On continue ainsi en se rendant compte qu'à chaque année passée le jour de la semaine correspondant au 24 décembre avance de un en un, sauf pour les années bissextiles où il saute un jour.
On trouve ainsi que seules les années 1903, 1908 et 1914 ont un jeudi 24 décembre. Enfin, comme le dernier chiffre de son année de naissance est impair, on conclue qu'il est né le jeudi 24 décembre 1903.
<u>Note :</u> Donc le bonhomme a 115 ans. Joli record !

6.8 Omnisport

Un groupe d'amis fréquente un club omnisports : 9 d'entre eux font de la natation, 8 du tennis et 7 de l'escrime. On sait que 5 d'entre eux font de la natation et du tennis, 4 du tennis et de l'escrime et 3 de l'escrime et de la natation. Seulement 2 d'entre eux pratiquent les trois sports. Combien y a-t-il d'amis en tout ?

La situation peut être résumée par le diagramme suivant :



Puisque 2 des amis font les trois sports, on peut en déduire que $5-2=3$ amis font exclusivement de la natation et du tennis, $4-2=2$ du tennis et de l'escrime et $3-2=1$ de l'escrime et de la natation.
Parmi les 8 joueurs de tennis, 3 font également de la natation (mais pas d'escrime), 2 font également de l'escrime (mais pas de natation) et 2 font également les deux autres sports, ce qui laisse $8-(3+2+2)=1$ joueur exclusif de tennis.
Par la même méthode, on détermine qu'il y a $9-(3+1+2)=3$ nageurs exclusifs et $7-(2+1+2)=2$ escrimeurs exclusifs.
Il y a donc en tout $1+2+3+1+2+3+2=14$ amis.