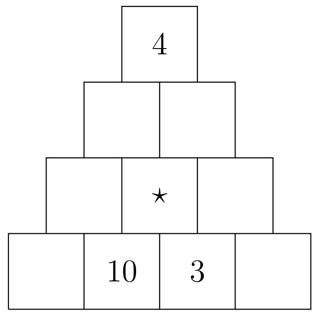
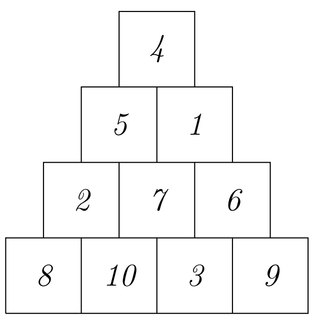
1 Niveau 1

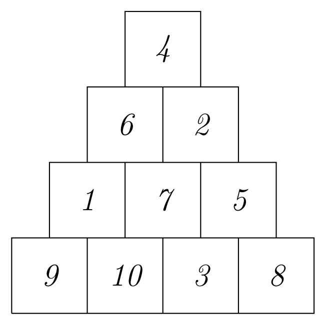
Énigme 1.1. Dans chaque case de la pyramide suivante se trouve la différence des nombres qui sont dans les deux cases en-dessous. Par exemple, la case marquée $\star$ contient la diffférence $10 - 3$.



Pouvez-vous remplir la pyramide de sorte que tous les nombres de 1 à 10 apparaissent exactement une fois ?

Solution. *Il y a deux solutions.*





Énigme 1.2. (2018)

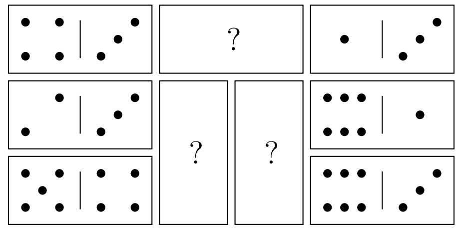
Solana veut acheter 50 biscuits pour son chien. Elle se rend donc en magasin et le marchand l'informe qu'il n'a que des sachets de 5 ou 7 bicuits. Solana veut exactement 50 biscuits, mais elle les veut dans le moins de sachets possibles.

Combien de sachets de 5 et de 7 biscuits va-t-elle recevoir ?

Solution. *Pour avoir exactement 50 biscuits avec des sachets de 5 ou 7 biscuits, on peut soit prendre 10 sachets de 5 biscuits, soit 5 sachets de 7 biscuits et 3 de 5 biscuits. L'idée c'est de regarder combien de sachets de 7 biscuits on peut prendre au maximum et de voir si on peut compléter avec des sachets de 5 biscuits. Une autre façon de voir les choses, c'est de remarquer qu'il faut forcément un nombre de sachets de 7 biscuits qui soit divisible par 5, car 50 et 5 sont divisibles par 5.*

Au final, Solana aura donc 5 sachets de 7 biscuits et 3 de 5 biscuits.

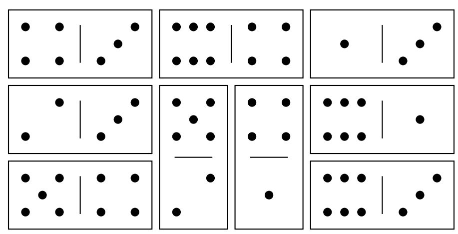
Énigme 1.3. Cyrus s'amuse avec quelques dominos qu'il range comme sur la figure suivante. Il aimerait que la somme de tous les points sur une ligne soit toujours égale à 21.



Pour ça, il doit placer trois des quatre dominos suivants dans les emplacements libres.

Pouvez-vous aider Cyrus à placer les dominos manquants ?

Solution.



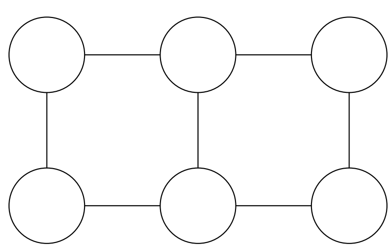
Énigme 1.4. H'aanit et son chat Linde ont à elles deux 34 ans. Sachant que H'aanit a 24 ans de plus que Linde, pouvez-vous trouver leur âge à toutes les deux ?

Solution. *Le piège est de répondre que Linde a 10 ans. En effet, si c'était le cas, H'aanit aurait* $10 + 24 = 34$ *ans et la somme de leur deux âges serait* $34 + 10 = 44$ *et non 34.*

La bonne réponse est que Linde a 5 ans. Ainsi, H'aanit a $5 + 24 = 29$ *ans et la somme des deux âges est* $29 + 5 = 34$ *ans, comme indiqué dans l'énoncé.*

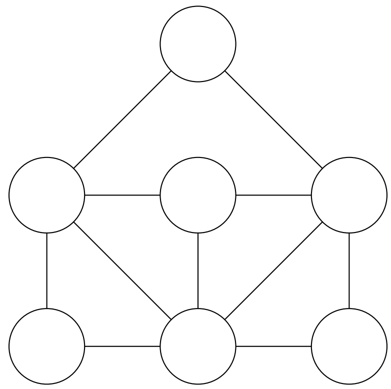
Énigme 1.5. (2022 - 2018)

Anna s'amuse avec ses pièces de monnaie. Avec 6 pièces, elle arrive à faire 2 carrés en les plaçant de la façon suivante :



Anna aimerait former encore un carré, mais il ne lui reste qu'une seule pièce. Où doit-elle la placer pour former un carré de plus ?

Solution. *Voici une des deux solutions possibles :*



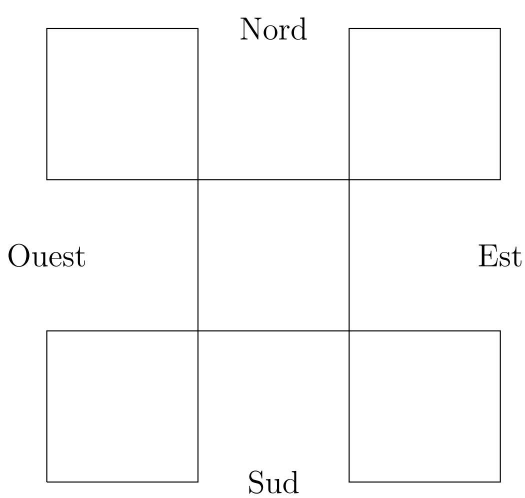
Énigme 1.6. Olberic joue aux fléchettes sur une cible un peu spéciale : il a 6 zones, chacune valant respectivement 3, 5, 7, 11, 15 et 22 points.

Après avoir lancé 3 fléchettes (qui touchent toutes la cible), il marque 27 points.

Quelles zones ont touché les flechettes lancées par Olberic ?

Solution. *Il y a deux solutions possibles :* $5 + 7 + 15$ *et* $5 + 11 + 11$.

Énigme 1.7. Lors de son exploration des ruines de Vénus, Vlad arrive dans une salle dont la sortie est fermée. En regardant plus en détail la salle, il remarque cinq statues de couleur ainsi que cinq dalles au sol.



Vlad comprend vite que pour ouvrir la porte et continuer son exploration il doit placer les statues sur les bonnes dalles. Sur chacune des statues, Vlad trouve des inscriptions :

Rouge : "Le violet se trouve à mon sud-est."

Bleu : "Le rouge se trouve à mon ouest."

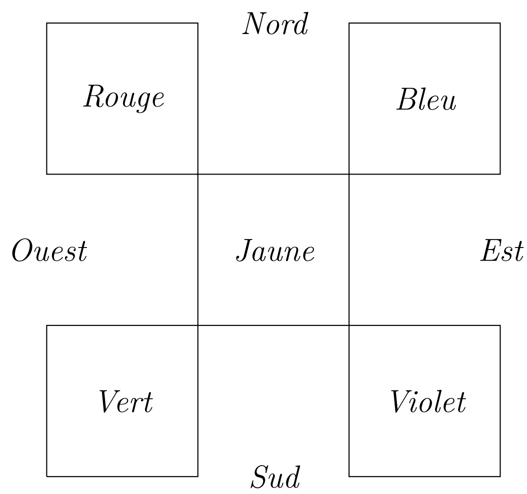
Jaune : "Le violet se trouve à mon sud-est."

Vert : "Le jaune se trouve à mon nord-est."

Violet : "Le rouge se trouve à mon nord-ouest."

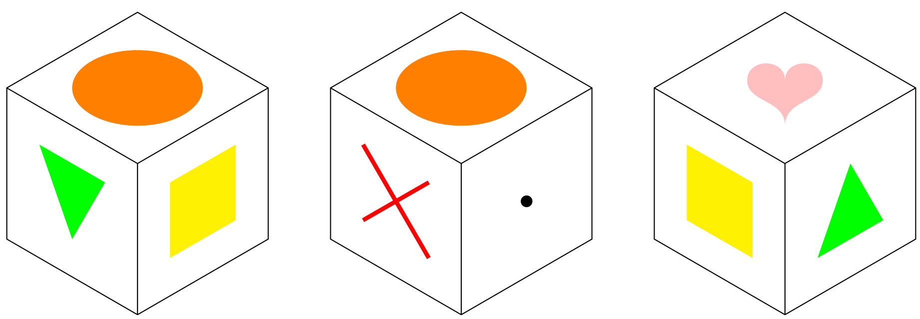
Pouvez-vous aider Vlad à placer les statues au bon endroit ?

Solution. *En faisant différents essais, on trouve la bonne solution :*



Énigme 1.8. (2022)

Izana s'amuse avec un dé qu'il a fabriqué lui même. Voici à quoi il ressemble vu sous trois angles différents.



Quelle face se trouve derrière le rond orange ?

Solution. *C'est le cœur rose. On peut s'en rendre compte en regardant le triangle vert. Sur la première image on voit que la face opposée au rond orange est celle qui est pointée par le triangle vert, et sur la troisième image on voit que le triangle pointe le cœur rose.*

---

2 Niveau 2

Énigme 2.1. (2018)

Sakura raffole des sucreries. En passant sur la place du marché, elle décide d'acheter un sachet contenant des bonbons de trois couleurs différentes : 4 rouges, 8 blancs et 24 jaunes.

Sur le chemin du retour, elle ne peut pas résister à l'envie d'en manger quelques uns. Elle commence par manger quelques bonbons rouges, puis elle mange deux fois plus de blancs que ce qu'elle a mangé de rouges et enfin, elle mange trois fois plus de jaunes que ce qu'elle a mangé de blancs.

En arrivant chez elle, elle se rend compte qu'il lui reste autant de bonbons de chaque couleur. Combien lui reste-t-il de bonbons ?

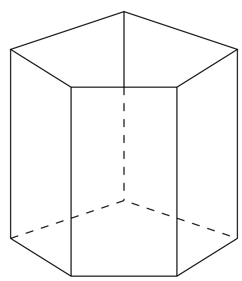
Solution. *Le plus simple est de tester ce qu'il se passe pour chaque valeur du nombre de bonbons rouges mangés par Sakura. On se rend alors compte que le seul moyen pour qu'à la fin il y ait autant de bonbons de chaque couleur, c'est qu'elle les a tous mangés.*

Énigme 2.2. (2022)

Dans 30 ans, Nolan aura le triple de son âge actuel. Quel âge a Nolan aujourd'hui ?

Solution. *On cherche un nombre tel que si on lui ajoute 30 on trouve la même chose que si on le multiplie par 3. Le nombre qui convient est 15. On peut le trouver après avoir fait quelques tests, ou en résolvant (de manière plus ou moins formelle ; n'oubliez pas que ce sont des élèves de CM1/CM2)* $30 + x = 3x \Leftrightarrow 30 = 2x \Leftrightarrow 15 = x$.

Énigme 2.3. Lora s'est fabriqué un pot à crayon avec 5 rectangles (les côtés) et un pentagone (le fond). Elle aimerait peindre les 6 faces de sorte que deux faces en contact par une arrête soient de couleur différente.



De combien de couleurs a-t-elle besoin au minimum ?

Solution. *Le fond ayant une arrête en commun avec les cinq côtés, il faut une couleur à part pour le fond.*

Pour les côtés, si on imagine une alternance entre deux couleurs, on se rend compte qu'on devra colorier deux faces consécutives de la même couleur (parce que 5 est impair). Il faut donc au moins trois couleurs pour les rectangles.

Au total, il faut donc au moins 4 couleurs.

Énigme 2.4. Lors de son exploration du dédale de Thabès, Celica arrive dans une salle contenant trois coffres, chacun portant une inscription pouvant être soit vraie, soit fausse. Les sens d'aventurière de Celica lui indiquent qu'il n'y a qu'une seule inscription qui est vraie et que le trésor se trouve dans le coffre qui porte cette inscription.

A : Les inscriptions sur les coffres B et C sont fausses.

B : L'inscription sur le coffre A est vraie.

C : L'inscription sur le coffre A est fausse.

Pouvez-vous aider Celica à trouver dans quel coffre se trouve le trésor ?

Solution. *Il y a plusieurs façons de raisonner, mais le plus simple c'est de remarquer que B ne peut pas dire la vérité, sinon A aussi et il y aurait deux coffres qui disent la vérité. Donc B ment, et A aussi. Le seul a dire la vérité, et donc à avoir le trésor, est C.*

Énigme 2.5. Mio dispose de cinq étiquettes avec des nombres.

25	10	55	20	4

Pouvez-vous trouver 3 étiquettes dont la somme des nombres vaut 100 ? Et 3 dont le produit des nombres vaut 1000 ?

Solution. *On a* $20 + 25 + 55 = 100$ *et* $4 \times 10 \times 25 = 1000$.

Énigme 2.6. Lin aimerait mettre ses amis Shulk et Poppi au défi. Voici les règles : Lin va choisir deux nombres différents entre 2 et 6 (inclus). Après, elle va donner la somme à Shulk et le produit à Poppi. Les deux amis devront alors trouver les deux nombres de départ.

Après avoir bien réfléchi, Lin s'approche de Shulk et lui chuchotte que la somme vaut 7, puis elle se dirige vers Poppi et lui chuchotte le produit. Cette dernière s'écrit aussitôt :

"Trop facile ! Je sais déjà quels sont les deux nombres !"

Quels sont les deux nombres ?

Solution. *Si la somme vaut 7, c'est que les deux nombres sont 2 et 5 ou 3 et 4. Cependant, le cas 3 et 4 n'est pas possible. En effet,* $3 \times 4 = 12 = 2 \times 6$, *donc Poppi aurait eu pour produit 12 et n'aurait pas pu trouver directement la valeur des deux nombres. C'est donc que les deux nombres sont 2 et 5.*

Énigme 2.7. Jin et Lora jouent à un jeu avec deux dés. Ils vont lancer les deux dés et faire le produit des valeurs sur les deux dés. Si le produit est pair (multiple de 2), Lora gagne. Si le produit est impair (non multiple de 2), Jin gagne.

Qui a le plus de chaces de gagner ?

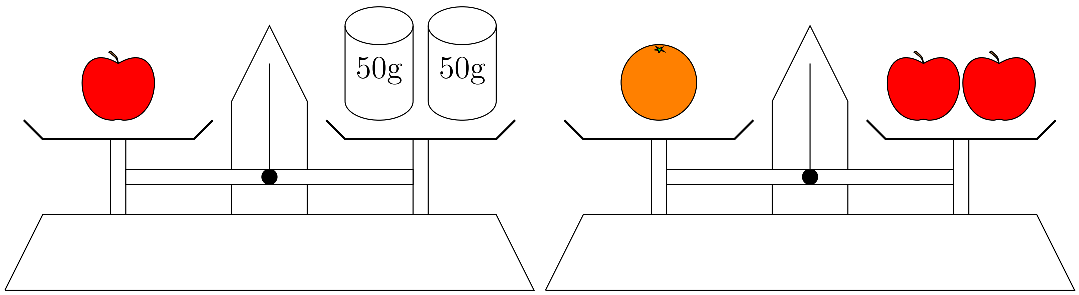
Solution. *Pour qu'un produit soit pair, il suffit qu'un des facteurs soit pair. Donc pour que Laura gagne, il suffit qu'au moins un des deux dés donne un score pair, ce qui est plus fréquent que les deux dés donnant un score impair.*

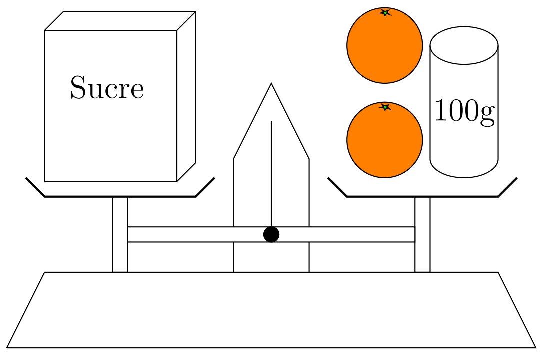
Si on veut être plus précis, Jin gagne seulement si les deux dés donnent un score impair, c'est à dire 1, 3 ou 5, ce qui a 1 chance sur 2 de se produire par dé, donc Jin a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$ *de chances de gagner, et Lora a* $100\% - 25\% = 75\%$ *de chances de gagner. (Bien sûr, on n'attend pas ce niveau de précision. L'important c'est d'en avoir l'intuition.)*

Lora a donc plus de chances de gagner.

Énigme 2.8. (2020)

Sakura a acheté une boîte de sucre, mais ne se rappelle plus quel poids elle fait. Pour essayer de retrouver le poids du paquet de sucre, elle essaie de faire plusieurs pesées et voici ce qu'elle obtient :





Combien pèse le paquet de sucre ?

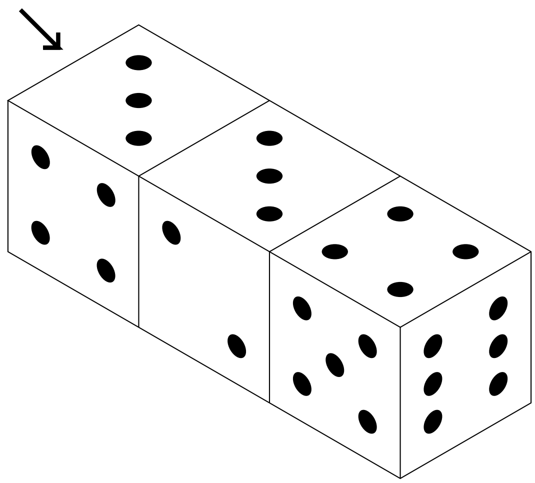
Solution. *La pomme fait le même poids que deux poids de 50g, donc elle fait 100g. Une orange fait le même poids que deux pommes de 100g, donc elle fait 200g. Enfin, le paquet de sucre pèse autant que deux oranges de 200g et un poids de 100g, donc il pèse 500g.*

---

3 Niveau 3

Énigme 3.1. (2019)

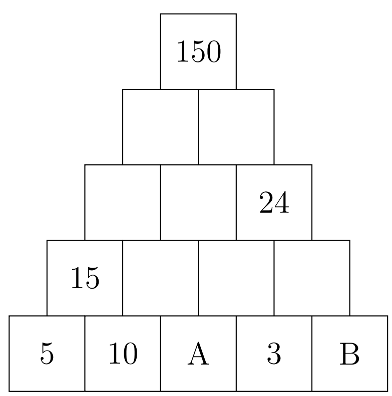
Izana a fait construire trois dés géants un peu spéciaux : la somme des chiffres sur les faces opposées ne fait pas forcément 7. Par contre, les trois dés sont identiques. Izana les place côte à côte de sorte que lorsque deux faces se touchent elles portent le même numéro.



Combbien de points y a-t-il sur la face cachée indiquée par la flèche ?

Solution. *On voit sur les dés de droite et du milieu que les chiffres 2, 3, 4, 5 et 6 sont représentés, il ne peut donc pas s'agir d'eux sur la face commune aux deux cubes. C'est donc la face 1 qui se trouve sur la face commune, et donc à l'opposé de la face 6. De ça on en déduit que la face commune aux dés du milieu et de gauche est celle qui est à l'opposé du 1, donc 6. Enfin, la face recherchée est donc celle à l'opposée du 6, donc la face 1.*

Énigme 3.2. Dans chaque case de la pyramide suivante se trouve la somme des nombres qui sont dans les deux cases en-dessous.



Pouvez-vous trouver les valeurs de A et B ?

Solution. *On peut temporairement remplir la case au-dessus de la case B par la valeur* $B+3$. *De même, en remplissant la case à côté par la valeur* $A+3$*, on en déduit que* $(A+3)+(B+3) = 24$. *Ainsi, on trouve que* $A + B = 18$.

De même, on trouve que $15 + 3(10 + A) + 2(3 + A) + 24 = 150$. *Ainsi,* $5A = 75$ *et donc* $A = 15$. *On en déduit alors que* $B = 18 - 15 = 3$.

		150		
	83	67		
	40	43	24	
15	25	18	6	
5	10	15	3	3

Énigme 3.3. Épica et Ysakor veulent se rendre d'Ablithia à Bacili. Pour s'amuser, ils décident de faire la course sur les 40 km qui séparent les deux villes.

Les deux amis partent en même temps d'Ablithia. Épica court en moyenne à 10 km/h, tandis qu'Ysakor court à 8 km/h.

Une fois arrivé en tête, Épica est tellement impatiente de se vanter auprès d'Ysakor qu'elle fait immédiatement demi-tour et court à la même allure jusqu'à retrouver son ami, puis repart aussitôt en direction de Bacili. Elle continue ses aller-retours inlassablement jusqu'à ce qu'Ysakor arrive finalement à Bacili.

Quelle distance a parcourrue Épica ?

Solution. *Si l'enfant bloque trop longtemps sur cette énigme, on pensera à donner l'indication suivante : Combien de temps Épica a-t-elle courru, et à quelle vitesse ?*

Épica, malgré ses aller-retours incessants, aura courru la même durée qu'Ysakor. Ysakor a parcourru les 40 km entre les deux villes à une vitesse de 8 km/h, il a donc courru $40/8 = 5$ *heures. Pendant ce temps, Épica courrait à 10 km/h, en 5 heures elle a donc parcourru* $5 \times 10 = 50$ *km.*

Énigme 3.4. Anna a reçu l'opération suivante à faire de la part d'une de ses sœurs :

$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & M & O & R & E \\ \hline M & O & N & E & Y \end{array}$$

Chaque lettre correspond à un et un seul chiffre et deux lettres ne peuvent pas correspondre au même chiffre.

Quelle valeur se cache derrière $MONEY$?

Solution. *La première chose à voir, c'est que* $M = 1$ *car le seul moyen pour que la somme de deux nombres ait un chiffre de plus que les nombres de départ est qu'il y ait une retenue lors de la dernière somme entre chiffres, et cette retenue sera forcément de 1. De manière générale, lors de la somme de deux nombres, les retenues ne peuvent valoir que 1 (ou 0).*

On doit donc avoir $S + M$ *(plus une éventuelle retenue) qui est supérieur ou égal à 10, donc* $S = 9$ *ou* $S = 8$ *(dans ce deuxième cas, il faut qu'il y ait une retenue).* O *vaut donc* 0 *ou* 1*, mais comme* $M = 1$*, on trouve que* $O = 0$*.*

On remarque aussi que $E+O$ (plus une éventuelle retenue) vaut N. Comme $O=0$ et $N \neq E$, on trouve que $N=E+1$ et qu'il y a une retenue à cet endroit, donc $N+R \leq 10$. De plus, $E+O$ ne donne pas de retenue, donc $S=9$.

*On a donc $N+R$ (plus une éventuelle retenue) égale $10+E$, mais $N=E+1$, donc $R+$ *retenue*$=9$. Comme $S=9$, on trouve que $R=8$ et que la retenue vaut 1. On doit donc avoir $D+E \geq 10$.*

On a déjà utilisé les chiffres 0, 1, 8 et 9. Remarquons que comme Y ne peut valoir ni 0, ni 1, en fait $D+E \geq 12$, ce qui ne laisse que 5 et 7 ou 6 et 7. Or comme $N=E+1$, E ne peut pas être égal à 7, ni à 6 (car sinon N et D seraient égaux à 7). Donc $E=5$ et $D=6$.

La somme est donc $9567+1085=10652$.

Énigme 3.5. (2018)

Huit amis se retrouvent autour d'un pique-nique et commencent à discuter de leurs âges respectifs :

H'aanit : Tu verras Tressa, la maturité vient avec l'âge.

Ophilia : C'est vrai que Tressa est la plus jeune du groupe.

Tressa : Primrose et Alfyn sont à peine plus âgés que moi tu sais. En plus ils ont le même âge.

Alfyn : Ce qui fait de nous les troisième plus jeunes, si j'ai bien compté.

Primrose : H'aanit et Cyrus ont le même âge aussi, non ?

Cyrus : Non, j'ai un an de plus qu'elle. Et cinq de plus que Thérion, même si je ne suis pas le doyen.

Therion : Je reste quand même plus âgé que vous quatre...

Olberic : Je me sens si vieux...

Saurez-vous classer ces huit personnes de la plus jeune à la plus âgée ?

Solution. *On sait directement que Tressa est la plus jeune et que Alfyn et Primrose sont en troisième position.*

On sait ensuite que Cyrus est plus âgé que H'aanit qui est elle même plus âgée que Therion qui est lui plus âgé que quatre personnes.

Comme on sait que Cyrus n'est pas le doyen, on a alors la suite suivante :

Tressa $<$? $<$ Alfyn $=$ Primrose $<$ Therion $<$ H'aanit $<$ Cyrus $<$?

Pour déterminer si Ophilia ou Olberic est le doyen, on s'appuie sur ce que dit ce dernier. On trouve alors :

Tressa $<$ Ophilia $<$ Alfyn $=$ Primrose $<$ Therion $<$ H'aanit $<$ Cyrus $<$ Olberic

---

Énigme 3.6. Parmi les livres de sa bibliothèque, Adenine se rend compte qu'il y en a un dont les pages ne sont pas numérotées. Pour régler ce problème, elle décide de les numéroter elle-même en commençant par la première de couverture et en finissant par la quatrième de couverture.

Une fois toutes les pages numérotées, elle se rend compte qu'elle a écrit exactement 50 fois le chiffre 1. Combien de pages comporte le livre d'Adenine ?

Solution. *On remarque dans un premier temps, qu'entre les pages 1 et 99, Adenine a utilisé 20 fois le chiffre 1 (10 fois pour les dizaines et 10 fois pour les unités). Ensuite, à partir de*

100, à chaque nouvelle page elle inscrit au moins une fois le chiffre 1. Entre les pages 100 et 109, elle a inscrit 11 fois le chiffre 1 (ne pas oublier de compter deux fois 101). Soit un total de 31 fois le chiffre 1 pour les pages 1 à 109.

A partir de là, on voit qu'elle écrit au moins deux fois le chiffre 1 pour les pages 110 à 119 (trois fois pour la page 111). Il faut donc écrire 21 fois le chiffre 1 pour les pages 110 à 119, ce qui amène le nombre de fois où on doit écrire le chiffre 1 à $31 + 21 = 52$ *pour les pages 1 à 119.*

Donc si Adenine a écrit 50 fois le chiffre 1, c'est qu'elle a numéroté les pages de 1 à 118.

Énigme 3.7. Lors de son exploration du dédale de Thabès, Celica arrive dans une salle contenant trois coffres, chacun portant une inscription pouvant être soit vraie, soit fausse. Un seul des trois coffres contient un trésor, les autres sont piégés.

A : Parmis les trois inscriptions sur les coffres, exactement deux sont fausses.

B : Parmis les trois inscriptions sur les coffres, exactement une est fausse.

C : Le trésor est dans un coffre dont l'inscription est fausse.

Pouvez-vous aider Celica à trouver dans quel coffre se trouve le trésor ?

Solution. *Les inscriptions des coffres A et B sont incompatibles, donc elles ne peuvent pas être vraies toutes les deux. Il y a donc au moins une inscription de fausse parmi les deux.*

Remarquons que les trois inscriptions ne peuvent pas être fausses, car sinon celle sur le coffre C nous dirait que le trésor est dans un coffre dont l'inscription est vraie, et donc le trésor ne serait nulle part.

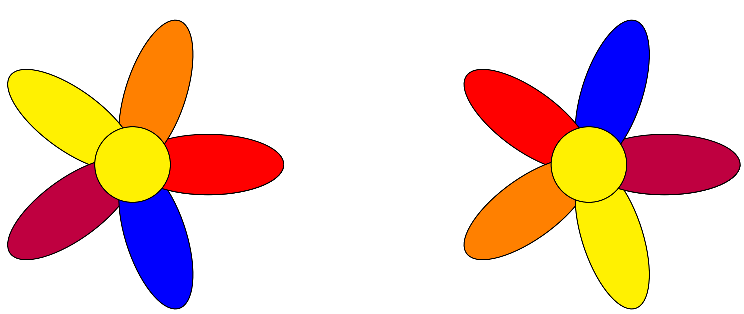
Il y a donc soit un, soit deux menteurs. Dans le premier cas, l'inscription sur A est donc fausse et A est le seul menteur, donc celle sur C est vraie et le trésor est dans un coffre dont l'inscription est fausse, c'est à dire dans A.

Si il y a deux menteurs, c'est A qui dit la vérité, donc C ment et le trésor est dans un coffre qui di la vérité, donc dans A.

Dans les deux cas, le trésor est dans A.

Énigme 3.8. Dans son jardin, Bianca a de magnifiques marguerites. Ce sont des fleurs à 5 pétales, chacun étant d'une couleur différente parmi rouge, orange, jaune, violet et bleu.

Combien existe-t-il de marguerites différentes ? Attention : il faut compter les fleurs à rotation près, c'est à dire que les deux fleurs suivantes comptent comme étant une seule fleur.



Solution. *Il faut repérer que pour compter les fleurs à rotation près, on peut fixer l'emplacement du pétale rouge (par exemple à droite) et compter combien de façons on a de placer les*

4 couleurs restantes sur les 4 pétales. On a alors 4 choix pour le pétale suivant le rouge dans le sens trigonométrique, puis 3 choix pour le suivant, puis 2 pour celui encore après, puis 1 seul pour le dernier pétale. Il y a donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *fleurs possibles à rotation près.*

---

4 Niveau 4

Énigme 4.1. (2018)

Daraen lance deux pièces. On sait que l'une des deux est tombée sur pile (on ne sait pas laquelle).

Quelle est la probabilité que l'autre soit tombée sur face ?

Solution. *Ce n'est pas 1/2.*

Quand on lance deux pièces, on a quatre possibilités équiprobables : les deux font pile, les deux font face, la première fait pile et la seconde fait face, la première fait face et la seconde fait pile.

L'hypothèse invalide seulement l'une des possibilités, les trois autres restent équiprobables et ont donc une probabilité de 1/3 chacune.

La probabilité que l'autre pièce tombe sur face est donc 2/3.

Énigme 4.2. Lors de son exploration du dédale de Thabès, Celica arrive dans une salle contenant trois coffres, chacun portant une inscription pouvant être soit vraie, soit fausse. Un seul des trois coffres contient un trésor, les autres sont piégés.

A : Si l'inscription sur B est fausse, alors celle sur C aussi.

B : Cette inscription est fausse et celle sur A est vraie.

C : Le trésor est dans un coffre dont l'inscription est vraie.

Pouvez-vous aider Celica à trouver dans quel coffre se trouve le trésor ?

Solution. *Il faut remarquer que B ne peut pas dire la vérité, donc la phrase "Cette inscription est fausse et celle sur A est vraie" est fausse, c'est donc que forcément l'inscription sur A est fausse. L'affirmation "Si l'inscription sur B est fausse, alors celle sur C aussi" est donc fausse. Comme l'inscription sur B est fausse, c'est que celle sur C est vraie.*

C est donc le seul coffre dont l'inscription est vraie. Le trésor est donc dans le coffre C.

Énigme 4.3. Melusia tente de s'échapper de la forteresse de l'arithmétique. Au bout d'un moment, elle arrive devant une porte fermée par quatre cadenas à deux chiffres. En faisant le tour de la pièce, elle trouve les indices suivants :

- Les quatre nombres sont consécutifs, rangés par ordre croissant.
- Le premier nombre est divisible par 5.
- Le deuxième n'est pas un carré.

- Le troisième est premier.
- Le quatrième est divisible par 3.

Pouvez-vous aidez Melusia à ouvrir la porte ?

Solution. *On cherche donc quatre nombres consécutifs entre 00 et 99. L'idée est de se concentrer sur les premier et quatrième nombres. Comme le premier est divisible par 5, il finit par 5 ou 0, donc le quatrième finit par* $0+3=3$ *ou* $5+3=8$*. On dresse alors la liste de tous les multiples de* 3 *qui finissent par* 3 *ou* 8*, et on vérifie si les deux autres nombres vérifient les conditions.*

En faisant ça, on remarque que dans les cas où le quatrième nombre finit par 3, le troisième finit par 2 et donc est divisible par 2. Pour qu'il soit premier, il faudrait qu'il soit égal à 2, mais dans ce cas le deuxième nombre est 1, qui est un carré. Donc le quatrième nombre finit par 8 et le premier par 5.

Les trois possibilités pour le quatrième nombre sont donc 18*,* 48 *et* 78*. Dans le premier cas* $18-2=16$ *est un carré et dans le troisième* $78-1$ *n'est pas un nombre premier. Il ne reste donc que la suite de nombres 45, 46, 47, 48 qui fonctionne.*

Énigme 4.4. Un voleur particulièrement efficace réussit à pénétrer dans la villa de Miss Mary et se dirige rapidement vers le coffre de son bureau. Le coffre est protéger par un cadenas à 6 chiffres dont il ne connait pas le code. Heureusement, un mémo se trouve juste à côté du coffre. Il y est écrit :

"Le code est ABCDEF.

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & C & A & E \\
\times & & & E & C & E \\
\hline
 & & & B & D & F \\
 & & C & A & E & \\
 & B & D & F & & \\
\hline
 & B & E & E & E & F
\end{array}$$

Chaque lettre correspond à un et unique chiffre et deux lettres ne peuvent pas correspondre à un même chiffre."

Pouvez-vous aider le voleur à trouver le code du coffre ?

Solution. *Il existe certainement plusieurs façons de résoudre cette énigme. En voici une :*

On commence par remarquer que le produit $CAE \times C0$ *est égal à* $CAE0$*, donc* $C=1$*.*

On voit ensuite que $D+E=E$*, en effet il n'y a pas de retenue sur cette colonne. De plus, comme la colonne la plus à gauche est* $B=B$*, c'est qu'il n'y a pas de retenue sur cette colonne et donc* $C+D+R=E$*, où* R *est une éventuelle retenue (donc 0, 1 ou 2 en fonction des valeurs de* B*,* A *et* F*),* $C=1$ *et* $D=0$*. On en déduit donc que* $E=1+0,1$ *ou* 2*.*

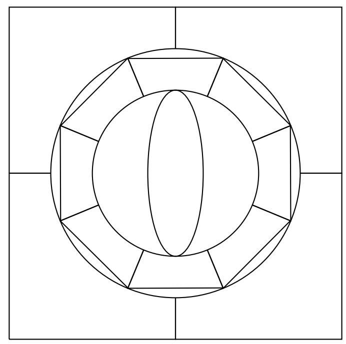
Ensuite, si $E=1$*,* $F=E^2=1$*, ce qui est exclu car* $E \neq F$*.*

Si $E=3$*, il faut que* $A \times E$ *soit un nombre qui termine par* $D=0$*, c'est à dire un multiple de 10. La seule possibilité est que* $A=0$*, ce qui est exclu car* $A \neq D$*.*

Donc $E=2$*. Ainsi,* $F=E^2=4$ *et* $A=5$ *de sorte que* $A \times E = 10$ *termine par* $D=0$*. On vérifie alors que l'opération fonctionne : On a* $152 \times 212 = 304 + 1520 + 30400 = 32224$*. Ainsi,* $B=3$ *et le code est* 531024*.*

Énigme 4.5. (2018)

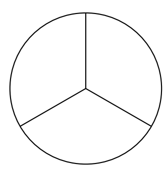
Un peintre aimerait colorier la figure suivante en utilisant le moins de couleurs différentes possibles. Cependant, afin de garder intacte l'énergie dégagée par son œuvre, il souhaite que deux zones ayant un côté en commun aient des couleurs différentes, mais il autorise deux zones qui ne se touchent que par des sommets à avoir la même couleur.



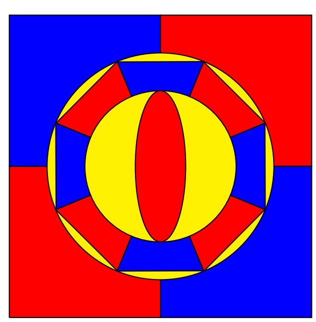
De combien de couleurs a-t-il besoin au minimum pour finir son œuvre ?

Solution. *Si on connait le théorème des quatre couleurs, on sait qu'on n'a pas besoin de plus de quatre couleurs. Cependant, on peut bien évidement s'en sortir sans.*

En regardant le dessin, on se rend vite compte qu'il y a plusieurs zones avec un point à la frontière de trois zones, comme sur ce dessin



Dans cette situation, on a forcément besoin d'au moins trois couleurs. On peut s'en sortir avec seulement trois, comme illustré sur ce dessin



Énigme 4.6. Lin aimerait mettre ses amis Shulk et Poppi au défi. Voici les règles : Lin va choisir deux nombres x et y tels que $1 < x < y$ et $x + y \leq 13$. Après, elle va donner la somme à Shulk et le produit à Poppi. Les deux amis devront alors trouver les deux nombres de départ.

Après que Lin leur ait donné la somme à l'un et le produit à l'autre, les deux amis discutent :

Poppi : "Je ne connais pas les deux nombres."

Shulk : "Même avec ce que tu dis, je ne connais pas les deux nombres."

Poppi : "Merci ! Maintenant je connais les deux nombres."

Shulk : "Maintenant moi aussi, du coup."

Quels étaient les deux nombres ?

Solution. *Voici une proposition de résolution : on dresse la liste de toutes les valeurs possibles pour les deux nombres. Il y en a 25.*

x	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	4	5	6	7	8	9	10
somme	5	6	7	8	9	10	11	12	13	7	8	9	10	11	12	13
produit	6	8	10	12	14	16	18	20	22	12	15	18	21	24	27	30

x	4	4	4	4	4	5	5	5	6
y	5	6	7	8	9	6	7	8	7
somme	9	10	11	12	13	11	12	13	13
produit	20	24	28	32	36	30	35	40	42

On remarque que parmis eux, seuls 10 sont tels que Poppi ne peut pas déterminer les deux nombres avec seulement leur produit. En effet, les produits 12, 18, 20, 24 et 30 apparaissent tous deux fois. Il reste donc

x	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5
y	6	9	10	4	6	8	10	5	6	6
somme	8	11	12	7	9	11	13	9	10	11
produit	12	18	20	12	18	24	30	20	24	30

Avec cette information, Shulk ne peut pas non plus savoir quels sont les deux nombres, c'est que donc il s'agit d'un couple dont la somme apparait au moins deux fois dans le tableau précédent, donc la somme vaut 9 ou 11. Il reste donc

x	2	3	3	4	5
y	9	6	8	5	6
somme	11	9	11	9	11
produit	18	18	24	20	30

Ceci permet à Poppi de conclure, donc ça veut dire que le produit que possède Poppi n'apparait qu'une seule fois dans la liste précédente. Il ne reste donc que trois possibilités

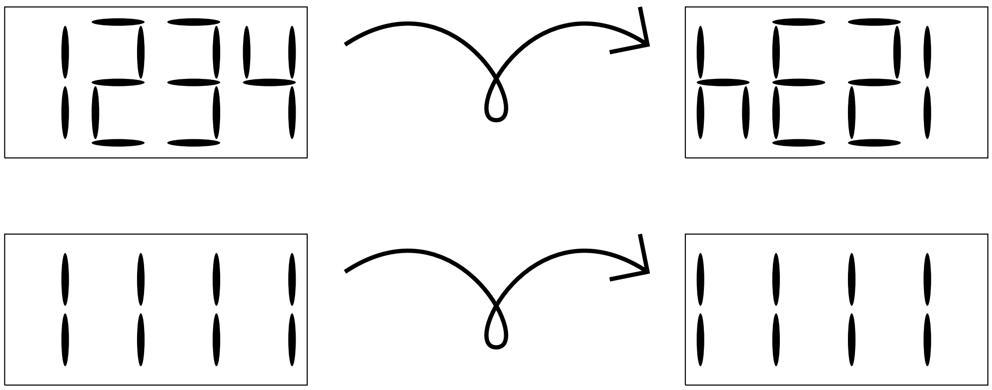
x	3	4	5
y	8	5	6
somme	11	9	11
produit	24	20	30

Comme cela permet à Shulk de conclure, c'est que la somme qu'elle a n'apparait qu'une fois dans la liste. On trouve donc que $x = 4$ et $y = 5$.

Énigme 4.7. (2019)

Tressa, marchande d'exception, souhaite vendre un thermomètre à affichage digital qui possède quatre digits. Pour pouvoir s'assurer qu'il marche bien et affiche une température exacte, Tressa veut l'allumer et comparer ce qu'il affiche avec son propre thermomètre.

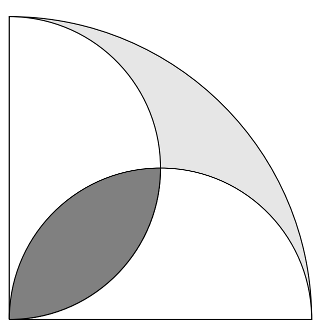
Malheureusement, le thermomère digital est un pavé parfait : impossible de savoir s'il est à l'endroit lorsque l'affichage est éteint. Tressa décide donc de l'allumer pour voir si ce qu'il affiche est vraiment un nombre, mais dans certains cas on ne peut pas conclure si le thermomètre est à l'endroit :



Dans combien de cas ne peut-on pas savoir si le thermomètre est à l'endroit ?

Solution. *Seuls les chiffres* 3*,* 4 *et* 7 *n'ont pas de sens si on les retourne, donc il y a 7 chiffres qui restent des chiffres quand on les retourne.*
Pour qu'on ne puisse pas savoir si le thermomètre est à l'endroit, il faut que les 4 chiffres qui soient affichés fassent parti des 7 chiffres qui restent des chiffres une fois retournés. Il y a donc $7^4 = 2401$ *cas où on ne peut pas savoir si le thermomètre est dans le bon sens.*

Énigme 4.8. Skye trace des cercles dans le sable. Voici la figure qu'elle obtient :



Quelle est l'aire la plus grande parmis les deux aires grisées ?

Solution. *Notons* A *l'aire en gris clair et* B *celle en gris foncé. On peut calculer l'aire totale de la figure de deux façons différentes : Premièrement, il s'agit de l'aire d'un quart de disque de rayon inconnu* r*, soit* $\frac{1}{4} \times \pi r^2$*. Deuxièmement, il s'agit de la somme de l'aire de deux demi-disques de rayon* $r/2$ *auquel il faut retirer l'aire* B *(qui a été comptée deux fois) et ajouter l'aire* A *(qui n'a pas été comptée), soit* $\pi(\frac{r}{2})^2 + A - B$*.*

Par égalité des aires, on trouve que

$$\frac{1}{4}\pi r^2 = \pi\frac{r^2}{4} + A - B,$$

soit en simplifiant par $\pi\frac{r^2}{4}$

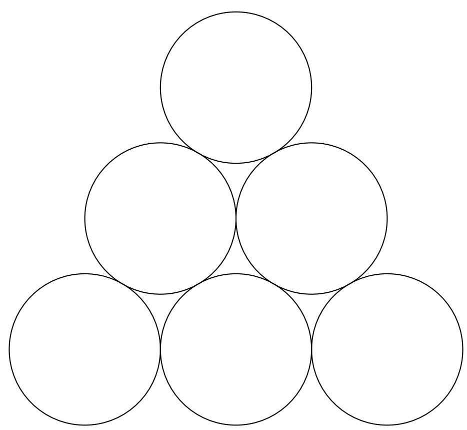
$$A = B.$$

Les deux aires sont donc égales.

---

5 Niveau 5

Énigme 5.1. Anna est très riche, si bien qu'elle aime beaucoup jouer avec ses pièces de monnaie. Aujourd'hui, elle joue avec 300 pièces et elle essaie de leur faire prendre diverses formes géométriques, comme par exemple un triangle équilatéral.



Si elle utilise ses 300 pièces, de combien de rangées sera constitué le plus grand triangle équilatéral qu'elle peut faire ?

Solution. *On voit sur l'exemple que pour un triangle composé de 3 rangées il faut* $1+2+3 = 6$ *pièces. Pour un triangle de 4 rangées, il faut* $1+2+3+4 = 10$ *pièces. De manière générale, pour un triangle de n rangées, il faut* $1+2+3+...+n$ *pièces.*

Si on ne sait pas combien fait $1+2+3+...+n$*, on peut le retrouver de la façon suivante : On note* $S = 1+2+3+...+n$ *et on remarque que* $2S = 1+2+3+...+n+n+...+3+2+1$*, de sorte à ce que quand on fasse les sommes* $1+n$, $2+(n-1)$, $3+(n-2)$, ..., $n+1$ *on trouve toujours* $n+1$ *(qui apparait donc n fois). Donc* $2S = (n+1)+(n+1)+...+(n+1) = n\times(n+1)$*, soit* $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

On cherche donc n tel que $S = \frac{n(n+1)}{2} = 300$ *et donc* $n(n+1) = 600$*. Après quelques essais, ou en résolvant le polynôme de degré 2 associé, on remarque que* $24\times 25 = 600$*, donc le triangle d'Anna aura 24 rangées.*

Énigme 5.2. En fouillant dans sa bibliothèque, Adenine se rend compte qu'un de ses livres a une page arrachée.

Dans les numéros de pages de ce livre, on retrouve exactement 47 fois le chiffre 1 et 22 fois le chiffre 0. Quelle page a été arrachée ?

Solution. *Essayons dans un premier temps de trouver le nombre de pages du livre.*

Entre les pages 1 et 99, le chiffre 1 a été utilisé 20 fois (10 fois pour les unités et 10 fois pour les dizaines). Entre les pages 100 et 109, il est utilisé 11 fois (ne pas oublier de compter deux fois la page 101) et entre les pages 110 et 119, il est utilisé 21 fois (ne pas oublier de compter trois fois la page 111). Soit un total de 52 utilisations du chiffre 1 pour numéroter les pages de 1 à 119.

Par un raisonnement similaire, on trouve que le chiffre 0 est utilisé 10 fois entre 1 et 99, 11 fois entre 100 et 109 et 1 fois entre 110 et 119, soit un total de 22 fois entre 1 et 119.

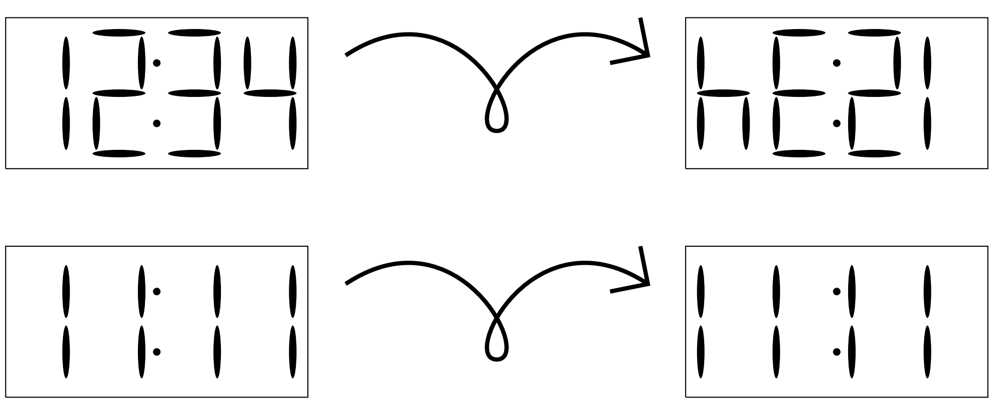
De ces observations, on conclut que le livre à au moins 117 pages, car il faut 48 fois le chiffre 1 et 22 fois le chiffre 0 pour numéroter de 1 à 117. Cependant, un livre a forcément un nombre pair de pages. Le livre a donc 118 pages, 120 pages, etc.

Cepedant, si le livre avait 120 pages, avant arrachage d'une page il y aurait donc 54 fois le chiffre 1 dans les numéros de page. Comme il n'y en a plus que 47 après arrachage d'une seule page, cela voudrait dire que cette page contient 7 fois le chiffre 1, ce qui n'est pas possible. De même, le livre ne peut pas avoir plus de 120 pages. Le livre a donc 118 pages.

Un livre de 118 page intact a 50 fois le chiffre 1 et 22 fois le chiffre 0 inscrits dans ses numéros de page. La page arrachée comporte alors $50 - 47 = 3$ *fois le chiffre 1 et* $22 - 22 = 0$ *fois le chiffre 0. Il ne faut pas oublier que lorsqu'on arrache une page d'un livre, on retire en réalité deux pages de numéros consécutifs, le premier étant pair. La seule page vérifiant toutes les conditions est la page 11/12.*

Énigme 5.3. (2019)

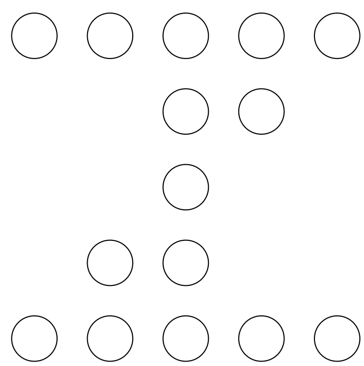
Tressa, marchande hors pairs, souhaite vendre un réveil à affichage digital. Malheureusement, c'est un pavé parfait : impossible de savoir si il est à l'endroit lorsque l'affichage est éteint. Tressa décide donc de l'allumer pour voir si ce qui est affiché correspond à une heure, mais dans certains cas on ne peut pas conclure si le réveil est à l'endroit.



Dans combien de cas ne peut-on pas savoir si le réveil est à l'endroit ?

Solution. *Seuls 7 chiffres restent des chiffres lorsqu'ils sont retournés : 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9. Donc les quatre chiffres du réveil doivent être choisis parmis ces sept-là. Il reste à savoir quelles heures restent des heures une fois retournées. Par exemple, 15h15 donne 51h51, qui n'est pas une heure. Les heures "réversibles" commencent nécessairement par le chiffre 0, 1 ou 2. Pour le deuxième chiffre, il s'agit d'un chiffre qui, à l'envers, a un sens en tant que chiffre des dizaines pour des minutes : il n'y a que 0, 1, 2 et 5. On trouve donc un total de* $4+4+3 = 11$ *heures possibles (25 heure n'existant pas). On suit le même raisonnement pour le nombre de minutes, soit un total de* $11^2 = 121$ *heures "réversibles" et donc de cas où on ne peut pas déterminer si le réveil est à l'endroit.*

Énigme 5.4. Anna s'ammuse avec ses 15 pièces de monnaie (toutes identiques). Elle remarque assez rapidement qu'elle peut les placer de sorte à former 4 lignes de 5 pièces, comme sur la figure suivante :



Cependant elle se demande si elle ne pourrait pas en faire plus.

Pouvez-vous l'aider à former 6 lignes de 5 pièces avec ses 15 pièces ?

Solution. *On prend le problème à l'envers. Si on trace 6 lignes en position générique (pas de parrallèles, pas d'intersections triples ou plus), combien de point d'intersection compte-t-on ? Chaque ligne intersecte les 5 autres exactement une fois, donc chaque ligne compte 5 points d'intersection. Comme il y a 6 lignes, il y a* $5 \times 6 = 30$ *points d'intersection "comptés avec multiplicités", c'est à dire qu'on a compté chaque point deux fois (puisqu'ils sont sur exactement deux lignes). Il y a donc* $\frac{30}{2} = 15$ *points d'intersection.*

Donc si on trace 6 lignes en position générique et qu'on place les 15 pièces aux points d'intersection, on forme bien 6 lignes avec 15 pièces.

Énigme 5.5. Au milieu de la multitude de livres que possède Adenine, cette dernière trouve une note étrange :

$$\begin{array}{cccccccc} & & J & O & U & R & N & E & E \\ + & A & J & O & U & R & N & E & E \\ \hline & B & O & U & R & B & A & K & I \end{array}$$

Chaque lettre correspond à un et un seul chiffre et deux lettres ne peuvent pas correspondre au même chiffre.

Quelle valeur se cache derrière chaque lettre ?

Solution. *Dans un premier temps on remarque que comme* $A \neq B$, $B = A+1$ *et* $J \geq 5$. *De plus, comme* $I \neq K$, *nécessairement* $E \geq 5$.

De ces deux remarques, on déduit que $A = 2N+1$ *donc est impair, que* $B = A+1$ *est pair et donc que* $N \leq 5$. *On trouve donc l'égalité suivante :* $2 \times JOUR = 1OURB$. *On raisonne alors en regardant les valeurs que peut prendre* R.

Si $R = 0$, *alors* $B = 0 = R$, *ce qui est exclu.*

Si $R = 1$ *ou* $R = 3$, *alors on doit avoir* $2 \times U = R$ *qui est impair, ce qui n'est pas possible.*

Si $R = 2$, *alors* $U = 1$ *ou* $U = 6$. *Or si* $U = 1$, *on doit avoir* $2 \times O = U = 1$, *ce qui est impossible. Si* $U = 6$, *alors* $2 \times O + 1 = U = 6$, *ce qui est aussi impossible.*

Si $R = 7$, *alors* $2 \times U + 1 = R = 7$, *donc* $U = 3$ *ou* $U = 8$. *On est alors dans une situation similaire au cas précédent : les deux cas sont impossibles.*

Si $R = 4$ *ou* $R = 5$, *alors* $U = 2$ *ou* $U = 7$. *Dans ces deux cas, on trouve les mêmes contradictions que dans les cas où* $R = 2$ *et* $R = 7$ *(avec* R, U *et* O *remplacés par* U, O *et* J*).*

Si $R = 6$ *ou* $R = 8$, *alors on doit avoir* $2 \times U + 1 = R$, *ce qui est impossible par parité.*

Il ne reste donc que $R = 9$, *dans ce cas on trouve* $B = 8$, $A = B - 1 = 7$, $U = 4$ *(car* $U = 9 = R$ *est exclu),* $O = 2$ *(car* $O = 7 = A$ *est exclu) et* $J = 6$ *(car* $J \geq 5$*). Il ne reste donc que* E, N, K *et* I *à attribuer à* 0, 1, 3 *et* 5. *On trouve donc naturellement* $E = 5$, $I = 0$, $K = 1$ *et donc* $N = 3$. *L'équation est donc*

$$\begin{array}{cccccccc} & & 6 & 2 & 4 & 9 & 3 & 5 & 5 \\ + & 7 & 6 & 2 & 4 & 9 & 3 & 5 & 5 \\ \hline & 8 & 2 & 4 & 9 & 8 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

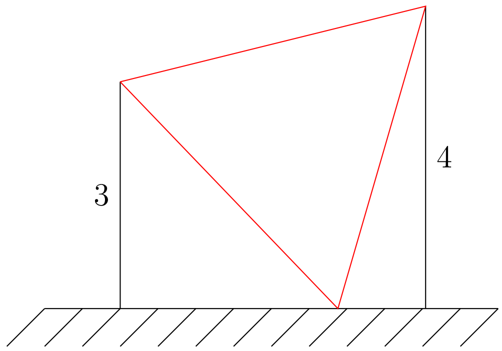
Énigme 5.6. (2018)

On appelle "miroir" d'un nombre à deux chiffres le nombre qu'on obtient en permuttant ses deux chiffres ; par exemple, le miroir de 23 est 32.

Combien de nombres à deux chiffres sont tels que leur somme avec leur miroir est un carré ?

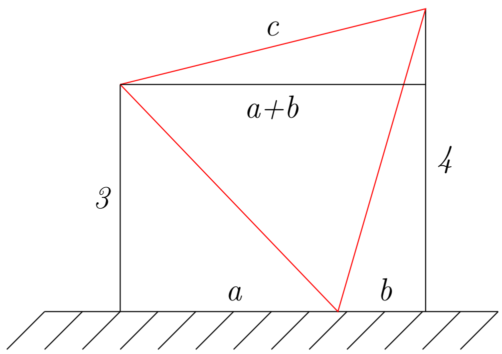
Solution. *On écrit un nombre à deux chiffres sous la forme* $10 \times a + b$ *avec* a *et* b *entre 0 et 9. Son miroir est* $10 \times b + a$. *Donc on cherche toutes les paires* (a, b) *telles que* $10 \times a + b + 10 \times b + a = 11(a + b)$ *est un carré. Comme* $a + b \leq 9 + 9 = 18$ *et que 11 est premier, la seule possibilité est que* $a + b = 11$, *ce qui donne les nombres suivants : 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 et 92.*

Énigme 5.7. Un drapeau ayant la forme d'un triangle équilatéral est accroché à deux mâts de respectivement 3 mètres et 4 mètres. Le drapeau affleure au sol comme sur la figure suivante :



Quelle est la longueur du côté du drapeau ?

Solution. *Considérons les notations suivantes :*



On a alors trois triangles rectangles, qui permettent d'écrire d'après le théorème de Pythagore

$$c^2 = 9 + a^3 = 16 + b^2 = 1 + (a + b)^2.$$

On en déduit donc (par exemple) que $a = \sqrt{b^2 + 7}$*. En remplant dans la dernière égalité, on trouve donc que*

$$16 + b^2 = 1 + (\sqrt{b^2 + 7} + b)^2 = 8 + 2b^2 + 2b\sqrt{b^2 + 7},$$

de quoi on déduit

$$2b\sqrt{b^2 + 7} = 8 - b^2.$$

En élevant au carré, on trouve

$$4b^2(b^2 + 7) = 64 - 16b^2 + b^4,$$

soit

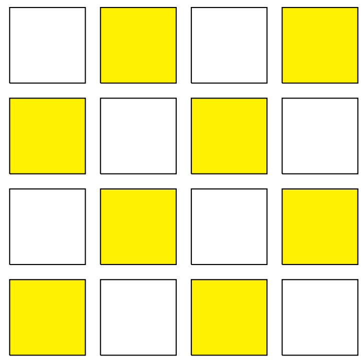
$$3b^4 + 44b^2 - 64 = 0.$$

On trouve alors que b^2 *est solution de l'équation* $3X^2 + 44X - 64 = 0$*, donc* $b^2 = \frac{-22\pm 26}{3}$*. Comme* b^2 *est positif, on trouve que* $b^2 = \frac{-22+26}{3} = \frac{4}{3}$*, donc que* $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$*.*

Comme $c^2 = 16 + b^2$*, on trouve donc que* $c^2 = \frac{52}{3}$ *et donc* $c = \frac{2\sqrt{39}}{3}$*.*

Énigme 5.8. Le commandant Buck Murdock est face à une grille de quatre lignes et quatre colonnes de voyants dont certains clignotent et d'autres sont éteints. En ayant marre de voir tous ces voyants allumés, il cherche à tous les éteindre. Il n'a à sa disposition que huit boutons, un par ligne et un par colonne. A chaque fois qu'il appuie sur un bouton, il change l'état (allumé/éteint) de tous les voyants sur la ligne ou la colonne associée.

Par exemple, dans cette situation le commandant peut éteindre tous les voyants en appuyant sur exactement 4 boutons.



Cependant, le commandant sait que ce n'est qu'une question de temps avant que d'autres voyants ne s'allument, chacun ayant une chance sur deux de s'allumer. Lorsque ça arrivera, combien y a-t-il de chances que le commandant puisse à nouveau éteindre tous les voyants ?

Solution. *Il faut compter deux choses : Le nombre de situations possibles du tableau et le nombre de situations où le tableau peut être éteint complètement.*

Le nombre de situations possibles du tableau est facile à calculer : il y a 16 voyants, chacun pouvant avoir 2 états possibles, il y a donc 2^{16} *situations possibles.*

Le nombre de situations où le tableau peut être complètement éteint est un peu plus complexe à calculer. Il faut repérer qu'un tel état est forcément obtenu à partir du tableau éteint en appuyant un certain nombre de fois sur les boutons. De plus, appuyer deux fois sur un bouton ou appuyer sur tous les boutons revient à ne rien faire et l'ordre d'appui sur les boutons n'a pas d'importance. De ces remarques on peut déduire qu'un des boutons est inutile et que chaque bouton a deux états possibles. Il y a donc 2^7 *états du tableau où il peut être complètement éteint.*

La probabilité de tomber sur un tableau qui peut être éteint est donc $\frac{2^{16}}{2^7} = \frac{1}{2^9}$*, soit une chance sur* 512*.*

6 Niveau 6

Énigme 6.1. Lors de son exploration du dédale de Thabès, Celica arrive dans une salle contenant trois coffres, chacun portant une inscription pouvant être soit vraie, soit fausse. Un seul des trois coffres contient un trésor, les autres sont piégés.

A : Si ce message était sur B, il dirait : "A et C mentent".

B : Si ce message était sur C, il dirait : "Le trésor est dans un coffre dont l'inscription est vraie".

C : Si ce message était sur A, il dirait : "Parmi A et B, exactement une des inscriptions est fausse".

Pouvez-vous aider Celica à trouver le trésor ?

Solution. *Supposons que A ment. Si B ment aussi, la phrase que A attribue à B est donc vraie et C ment aussi. Comme C ment et A aussi, la phrase que C attribue à A est vraie et seul un coffre parmi A et B mentent, ce qui n'est pas le cas. Donc A et B ne peuvent pas mentir en même temps.*

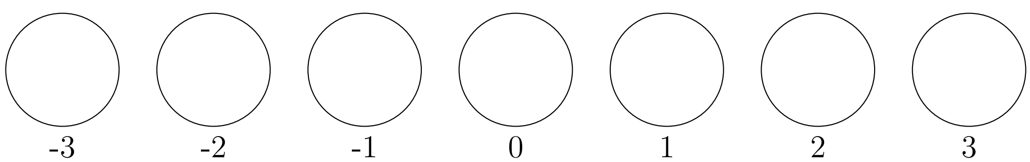
Supposons maintenant que A ment et que B dit la vérité. Alors dans ce cas la phrase que A attribue à B est fausse, donc C doit dire la vérité. Cependant, si A ment et C dit la vérité alors la phrase que C attribue à A est fausse, alors qu'effectivement un seul coffre parmi A et B ment. Donc B ne peut pas dire la vérité si A ment.

On en déduit que A dit la vérité, et donc B ne peut pas dire la vérité, car sinon A mentirait. La phrase que C veut attribuer à A est donc vraie et comme A dit la vérité, C doit aussi dire la vérité. Comme B ment, la phrase qu'il attribue à C (qui dit la vérité) est fausse, donc le trésor est dans un coffre qui ment. Le seul qui ment est B, donc le trésor est dans B.

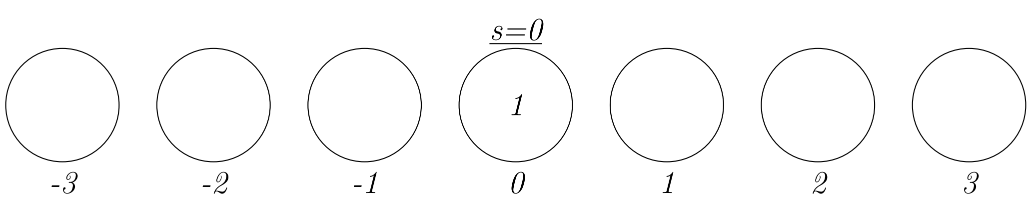
Énigme 6.2. Dans une galaxie lointaine, très lointaine, les étoiles sont alignées presque parfaitement. Sur l'une de ces étoiles, avant son extinction, une forme de vie a réussi à mettre au point un robot capable de s'autorépliquer et de coloniser d'autres étoiles.

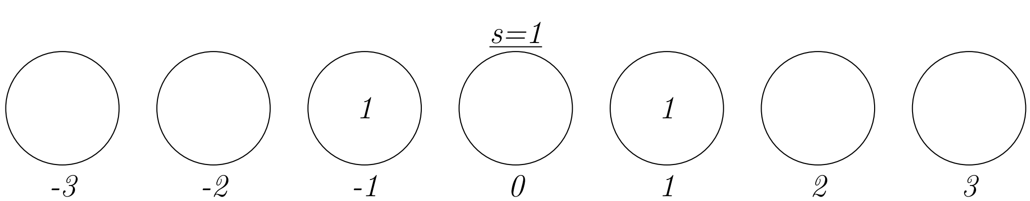
Le robot met un siècle à créer deux robots identiques puis à les envoyer sur les deux étoiles les plus proches, après quoi, malheureusement, il s'autodétruit. Une fois arrivés sur leur nouvelle étoile, les deux robots répètent le même procédé que leur parent, si bien qu'après un siècle ils crééent deux nouveaux robots chacuns, les envoient sur les étoiles les plus proches, puis s'autodétruisent. Et ainsi de suite.

Si on note les planètes de la façon suivante, combien y aura-t-il de robots sur la planète k après s siècles ?

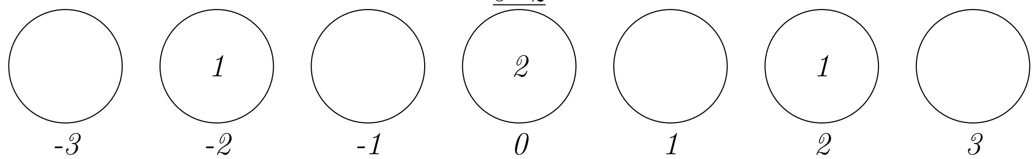


Solution. *Après quelques itérations, on trouve les nombres de robots suivants :*

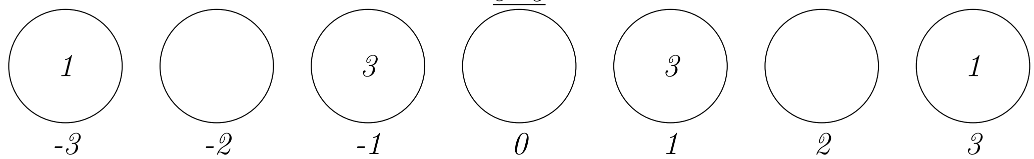




s=2



s=3



On remarque qu'il s'agit des nombres apparaissant dans le triangle de Pascal. Si on note $R(k, s)$ le nombre de robot sur la planète k après s siècles, on peut donc conjecturer la formule suivante :

$$R(k, s) = \begin{cases} 0 & \textit{si } k+s \textit{ est impair} \\ \binom{s}{\frac{k+s}{2}} & \textit{si } k+s \textit{ est pair} \end{cases}.$$

La formule en elle même n'est pas importante, cependant il faut justifier que cette intuition perdure pour les grandes valeurs de s.

On peut le montrer par récurrence à partir de la formule suivante décrivant l'évolution du nombre de robots sur une planète d'un siècle sur le suivant : $R(k, s+1) = R(k-1, s) + R(k+1, s)$. En effet, une planète reçoit autant de robots de ses deux voisines que ce qu'il y avait de robots sur ces planètes au siècle précédent.

Cette formule représentant effectivement l'évolution des coefficients du binôme dans le triangle de Pascal, on vient de prouver la formule.

Énigme 6.3. Lin aimerait mettre ses amis Shulk et Poppi au défi. Voici les règles : Lin va choisir deux nombres x et y tels que $2 < x < y$ et $x + y \leq 15$. Après, elle va donner la somme à Shulk et le produit à Poppi. Les deux amis devront alors trouver les deux nombres de départ.

Après que Lin leur ait donné la somme à l'un et le produit à l'autre, les deux amis discutent :

Poppi : "Je connais les deux nombres !"

Shulk : "Déjà ?! Pas moi..."

Poppi : "Et si je te dis que le plus petit des deux est pair ?"

Shulk : "Alors je sais qui sont les deux nombres !"

Mio, qui passait par là et écoutait la discussion des deux amis, intervient :

Mio : "Je ne sais pas quels sont les deux nombres..."

Shulk : "Pourtant, si on te donne le plus grand des deux, tu peux trouver l'autre."

Mio : "Merci ! Maintenant je connais les deux nombres !"

Quels étaient les deux nombres ?

Solution. *Dressons la liste de toutes les valeurs possibles pour les deux nombres. Il y en a 25.*

x	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
y	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	9	10	11
somme	7	8	9	10	11	12	13	14	15	9	10	11	12	13	14	15
produit	12	15	18	21	24	27	30	33	36	20	24	28	32	36	40	44

x	5	5	5	5	5	6	6	6	7
y	6	7	8	9	10	7	8	9	8
somme	11	12	13	14	15	13	14	15	15
produit	30	35	40	45	50	42	48	54	56

On remarque que parmis eux, seuls 17 sont tels que Poppi peut déterminer les deux nombres avec seulement leur produit. Ce sont les couples dont le produit n'apparait qu'une fois. Il reste donc les couples suivants.

x	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7
y	4	5	6	7	9	11	5	7	8	11	7	9	10	7	8	9	8
somme	7	8	9	10	12	14	9	11	12	15	12	14	15	13	14	15	15
produit	12	15	18	24	30	36	20	28	32	44	35	45	50	42	48	54	56

Avec cette information, Shulk ne peut pas savoir quels sont les deux nombres, c'est que donc il s'agit d'un couple dont la somme apparait au moins deux fois dans le tableau précédent, donc la somme vaut 9, 12, 14 ou 15. Il reste donc

x	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7
y	6	9	11	5	8	11	7	9	10	8	9	8
somme	9	12	14	9	12	15	12	14	15	14	15	15
produit	18	30	36	20	32	44	35	45	50	48	54	56

L'indice de Poppi permet d'éliminer plus de la moitié des possibilités. Il ne reste que

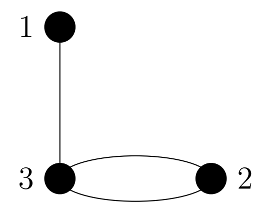
x	4	4	4	6	6
y	5	8	11	8	9
somme	9	12	15	14	15
produit	20	32	44	48	54

Comme cela permet à Shulk de conclure, c'est que la somme qu'elle a n'apparait qu'une fois dans la liste. Il ne reste alors que trois possibilités

x	4	4	6
y	5	8	8
somme	9	12	14
produit	20	32	48

Comme Mio, on n'a pas assez d'informations pour conclure. Cependant, le dernier indice assure que connaitre y permet de trouver x, donc y ne peut pas valoir 8 car sinon on ne peut pas trouver x. Donc $x = 4$ et $y = 5$.

Énigme 6.4. Lin prépare des feux d'artifices pour la fête du village. Cependant, il s'agit de feux d'artifices un peu particuliers : chacun porte un numéro de 1 à n qui représente le nombre de fils qui doivent être connectés à d'autres feux pour qu'ils puissent fonctionner. Par exemple, avec seulement trois fusées, elles peuvent être connectées de la façon suivante :



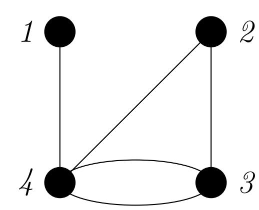
Cependant, un feu d'artifice avec seulement 3 fusées, c'est un peu triste...

Quelle condition doit vérifier le nombre de fusées pour que Lin puisse connecter toutes les fusées entre elles ?

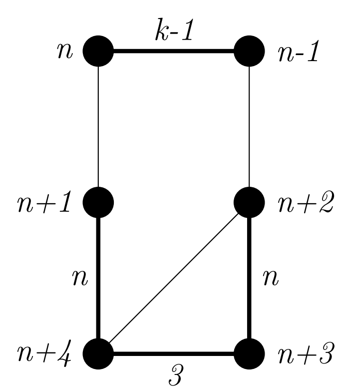
Solution. *En faisant quelques essais, on se rend compte qu'on peut trouver de tels câblages pour 3 ou 4 fusées, mais pas pour 5 ou 6.*

En fait, on peut remarquer que pour pouvoir câbler toutes les fusées il faut que le nombre de fusées soit divisible par 4, ou qu'il soit congru à 3 modulo 4. En effet, si il y a n fusées, il faut $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ connections. Cependant, une connection se fait entre deux fusées, il faut donc qu'il y ait un nombre pair de connections, et donc que $n(n+1)$ soit divisible par 4. Comme n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, ils ne peuvent pas être pairs tous les deux, et donc soit n soit $n+1$ est divisible par 4.

Montrons maintenant que si n ou $n+1$ est divisible par 4 alors on peut câbler toutes les fusées. Pour ce faire, on raisonne par récurrence : Si il y a 3 fusées, on fait comme sur le dessin proposé dans l'énoncé. Si il y a 4 fusées, on fait comme ça :



A présent, supposons qu'il existe une façon de relier n fusées de sorte que les fusées n et $n-1$ soient reliées par un nombre $k > 0$ de câbles. Alors on peut relier $n+4$ fusées de la façon suivante :



où les câbles épais avec un nombre l à côté correspondent à l câbles.

On trouve donc que Lin peut câbler les n fusées si et seulement si n ou $n+1$ est divisible par 4.

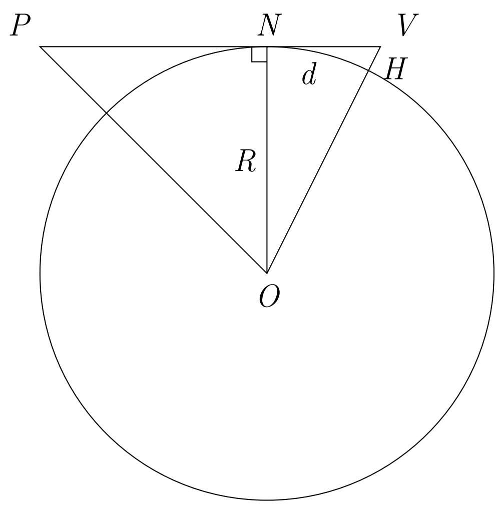
Énigme 6.5. Le navire de Corrin navigue par temps clair sur une mer d'huile à 7 km/h. Au bout d'un moment dans le nid-de-pie la vigie crie en apercevant la flamme du phare de la ville vers laquelle le navire se dirige.

Précisément 3 heures plus tard, un marin qui travaille à la surface de l'eau voit enfin apparaitre la lumière du phare à l'horizon.

Quelle est la hauteur du bateau ?

Rappel : Le rayon terrestre est de 6371 km.

Solution. *On s'appuie sur le schéma suivant*



avec R le rayon terrestre, H la hauteur du bateau, N l'emplacement du navire quand le marin au niveau de l'eau voit la flamme du phare, V l'emplacement de la vigie au moment où elle voit la lumière du phare et P le sommet du phare.

Calculons d. Il s'agit de la distance entre l'endroit où la vigie voit le phare pour la première fois et l'endroit où le marin au niveau de l'eau la voit, trois heure plus tard. C'est donc la distance parcourue par le bateau en 3 heures à 7km/h, donc $d = 21$ km.

A présent, si on note $\alpha = \widehat{NOV}$, on a $d = R\alpha$, d'où $\alpha = d/R$. De plus, la trigonométrie dans le triangle ONV assure que $cos(\alpha) = R/(R+H)$. On trouve alors que $R+H = R/cos(\alpha)$ et enfin $H = R/cos(\alpha) - R$.

Après calcul on trouve que H vaut environ 0,035 km, soit 35 mètres.

Énigme 6.6. Tressa a encore oublié le code du cadenas de son entrepot. Cependant elle se souvient que c'est un nombre très particulier : si on fait sa division euclidienne par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 il reste toujours 1. Elle se souvient aussi qu'il est inférieur à 50 000.

Quel est le code du cadenas de Tressa ?

Solution. *Notons n le code. On sait donc que $n-1$ est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12, donc il est divisible par leur ppcm, qui est $8 \times 9 \times 5 \times 7 \times 11 = 27720$. Les premiers nombres divisibles par tous les entiers de 1 à 12 sont donc 27720, $2 \times 27720 = 55440$, ...*

Donc n peut valoir 27721, 55441, ...

Comme $n < 50000$, c'est que $n = 27721$.

Énigme 6.7. Melusia se trouve enfermée dans la forteresse de l'arithmétique. En explorant la salle dans laquelle elle se trouve, elle trouve 4 cadenas à 2 chiffres ainsi que les indications suivantes :

- Les quatre nombres sont consécutifs, rangés dans l'ordre croissant et supérieurs à 10.
- L'un est un nombre premier.
- Un autre est un carré.
- Encore un autre est divisible par 3.
- Celui qui reste est divisible par 4.

Pouvez-vous trouver quatre nombres satisfaisant ces conditions ?

Solution. *Commençons par essayer de trouver quel nombre se trouve en quelle position. Notons a le nombre premier, $b = l^2$ le carré, c le multiple de 3 et d le multiple de 4.*

Remarquons tout d'abord qu'on ne peut pas avoir $d \pm 2 = a$. En effet, d est divisible par 4, donc par 2. Ainsi, $d \pm 2$ est divisible par 2, ce qui ne peut pas être le cas de a qui est un nombre premier supérieur à 10.

De même, $d \pm 2 \neq b$. En effet, si c'était le cas, on aurait $4k+2 = l^2$ et donc $2(2k+1) = l^2$. Comme c'est un carré pair, il doit être divisible par 4 et donc $2k+1$ doit être divisible par 2, ce qui est absurde.

On en déduit donc que $d \pm 2 = c$. Comme d est pair, c l'est donc aussi. Donc c est divisible par $3 \times 2 = 6$. Cependant, c n'est pas divisible par 4 (et donc par 12), car sinon $d - c = \pm 2$ le serait aussi.

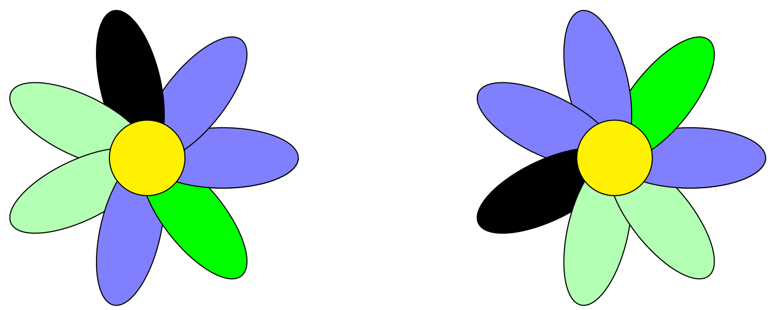
Remarquons ensuite que b ne peut pas être voisin de c. En effet, par identité remarquable $b - 1 = l^2 - 1 = (l-1)(l+1)$ est soit impair, soit divisible par 4. Comme c est pair mais pas divisble par 4, $b - 1 \neq c$. Enfin, si on décompose $l = 3q + r$ avec $r < 3$, on trouve que $l^2 = 9q^2 + 6qr + r^2 = 3p + r^2$, de sorte que le reste dans la division euclidienne de $b = l^2$ par 3 soit 0,1 ou $2^2 = 4 \equiv 1$. Ainsi, $b + 1$ aura pour reste dans la division euclidienne par 3 soit 1 soit 2, donc ne sera jamais divisible par 3. Donc $b + 1 \neq c$.

Le seul ordre possible est donc $c < a < d < b$. De plus, b est forcément impair, car $b - 1 = d$ est pair, et divisible par 3, car $b - 3 = c$ est divisible par 3. b est donc de la forme $(6s+3)^2$. Le seul nombre à deux chiffres supérieur à 10 vérifiant cette condition est $b = 9^2 = 81$. On vérifie alors que $d = b - 1 = 80 = 4 \times 20$ est divisible par 4, $a = b - 2 = 79$ est premier et $c = d - 3 = 78 = 3 \times 26$ est divisible par 3.

Les nombres recherchés sont donc 78, 79, 80 et 81.

Énigme 6.8. Les campanules de Bianca sont de magnifiques fleurs à 7 pétales. Chaque pétale peut être noir, bleu indigot, bleu ciel, vert pâle ou vert pomme.

Combien y a-t-il de campanules différentes ? Attention : On compte les fleurs à rotation près, c'est à dire que les deux fleurs suivantes comptent comme étant une seule fleur.



Solution. *Si on ne demandait pas de compter les fleurs à rotations près, on raisonnerait simplement de la façon suivante : Il y a 7 pétales, chacun peut être d'une couleur parmi 5 possibles, il y a donc* $5^7 = 78125$ *fleurs possibles.*

Cependant, en faisant ça on compte certaines fleurs plusieurs fois. Plus précisément, à part les 5 fleurs complètement unies qu'on ne compte qu'une fois, on compte toutes les fleurs 7 fois. C'est une conséquence du fait que 7 est premier.

On peut le voir de différentes façons. Par exemple, pour une fleur donnée notons $\theta = k \times \frac{2\pi}{7}$ *le plus petit angle tel que la fleur reste identique après rotation d'angle* θ*, avec* $k \in \{1, ..., 7\}$*. Comme 7 est premier, si* $k \neq 7$ *on peut trouver un entier* n *tel que* $n\theta = \frac{2\pi}{7}$ *modulo* 2π*, c'est à dire que* $k = 1$ *est aussi un angle rendant la fleur invariante. Or si* $k = 1$*, tout pétale est de la même couleur de son voisin, donc la fleur est unie. En particulier, pour chaque fleur non-unie,* $k = 7$*. Par ailleurs, l'entier* k *est exactement le nombre de fois qu'on a compté une même fleur à rotation près.*

Ainsi, le nombre de fleurs à rotation près est donc

$$\frac{5^7 - 5}{7} + 5 = 11165.$$