Ecole Polytechnique 98 . Filière MP . Epreuve Math II

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

***

On attachera la plus grande importance à la clarté , à la précision et à la concision de la rédaction .

***

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

***

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbb{C}$. On rappelle que, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}'$, ce dernier est, en particulier, un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, ce qui donne un sens à la $\mathbb{K}$ - dimension de $\mathbb{K}'$, notée $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}')$.

Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un polynôme de degré > 0 est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0 . Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1 .

La question 1 est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question 2 n'est pas utilisée dans la suite.

Première Partie

On désigne par $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, par α un nombre complexe non nul, par $\mathbb{K}[\alpha]$ le sous-$\mathbb{K}$ - espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres α^n , $n = 0, 1, \ldots$, enfin par $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ annulés par α .

1. (a) Montrer que les deux conditions suivantes équivalentes :

$$(i)\ \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha]) < +\infty$$

$$(ii)\ I_{\mathbb{K}}(\alpha) \neq \{0\}$$

   Si elles sont remplies, on dit que α est $\mathbb{K}$ - algébrique, ce que l'on supposera dans la suite de cette question .

   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que tout élément de $I_{\mathbb{K}}(\alpha)$ soit un multiple de P , et que P est irréductible .

   Ce polynôme sera noté $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ et est appelé polynôme $\mathbb{K}$ - minimal de α .

   (c) Comparer le degré de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])$.

   (d) Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps .

2. *Applications numériques.* On prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

   (a) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ - minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

   (b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ - minimal de $\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Deuxième Partie

On définit $\mathbb{K}$ et α comme dans la première partie . On suppose que α est $\mathbb{Q}$ - algébrique et on pose $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])$.

3. Montrer que, si P est un élément irréductible de $\mathbb{K}[X]$, ses zéros dans $\mathbb{C}$ sont tous simples .
4. (a) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les zéros de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$ - algèbres σ_i de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.
   (b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de $\mathbb{K}$ - algèbres de $\mathbb{K}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$?
5. Montrer que si β est un élément de $\mathbb{K}[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[\beta]$
6. Etant donné un élément β de $\mathbb{K}[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $\mathbb{K}[\alpha]$ vérifiant $\mathbb{K}[\beta_1] = \mathbb{K}[\beta_2] = \mathbb{K}[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

   [On pourra introduire , pour $i \neq j$, l'ensemble E_{ij} des éléments λ de $\mathbb{K}$ vérifiant

   $\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)$] .

Troisième Partie

On fixe un nombre complexe $\mathbb{Q}$ - algébrique non nul θ , et on pose $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\theta]$, $n = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$. On note σ_i , $i = 1, \ldots, n$, les morphismes de $\mathbb{Q}$ - algèbres de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, α désigne un élément de $\mathbb{K}$; on appelle M_α l'endomorphisme du $\mathbb{Q}$ - espace vectoriel $\mathbb{K}$ défini par $M_\alpha(\beta) = \alpha.\beta$, pour tout $\beta \in \mathbb{K}$, et Δ_α son polynôme caractéristique défini par $\lambda \mapsto \det\ (\lambda I - M_\alpha)$.

7. On pose $m = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$, $d = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]}(\mathbb{K})$. Verifier que, si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une $\mathbb{Q}[\alpha]$ - base de $\mathbb{K}$, les éléments $\alpha^p.e_r$ où $p = 0, \ldots, m-1$ et $r = 1, \ldots, d$, forment une $\mathbb{Q}$ - base de $\mathbb{K}$.
8. (a) Démontrer l'égalité $\Delta_\alpha = \left(P_{\mathbb{Q}}(\alpha)\right)^d$.

   (On pourra examiner d'abord le cas où $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{K}$) .

   (b) Démontrer l'égalité $\mathrm{tr}\ (M_\alpha) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$.
9. Pour tout $\{1, \ldots, n\}$ - uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on pose

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det\ \left([\mathrm{tr}\ (M_{\alpha_i\alpha_j})]_{i,j}\right)$$

   Exprimer $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en fonction de $\det\ \left([\sigma_i(\alpha_j)]_{i,j}\right)$.

10. Soit $A = (A_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et soit $\beta_i = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} A_{i,p}\alpha_p$.

    Vérifier que

$$D(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\det\ A)^2.D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

11. Montrer que

$$D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.\prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta))$$

12. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour qu'un n - uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit une $\mathbb{Q}$ - base de $\mathbb{K}$.
13. (a) Vérifier que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet un unique zéro réel, que l'on note θ .
    (b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ - minimal de θ .
    (c) calculer $D(1, \theta, \theta^2)$.

***