

FONCTIONS INTEGRABLES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE
INTEGRALES IMPROPRES

Le problème ci-dessous est la première partie de l'épreuve d'analyse de l'agrégation interne 2000.

Les notions nécessaires à la résolution de cette partie sont :

- *Intégrales convergentes, semi-convergentes (notamment le théorème d'Abel).*
- *Fonctions intégrables sur un intervalle (notion développée actuellement en classes préparatoires.*
- *Continuité et dérivabilité des fonctions définies par des intégrales (Théorèmes de Lebesgue).*

On note $\mathcal{C}$, l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on désigne par $\Pi(\sigma)$ le demi-plan formé des complexes s tels que : $\Re(s) > \sigma$. On pose $\Pi(-\infty) = \emptyset$ et $\Pi(+\infty) = \mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{C}$. Si $s \in \mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini lorsque l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xs} f(x) dx$ converge. On note alors $\mathcal{L}(f)(s)$ la valeur de cette intégrale. Le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$, noté $\mathcal{DL}(f)$, est une partie de $\mathbb{C}$. L'application $\mathcal{L}(f)$ est appelée transformée de Laplace de f .

(1) **Premier exemple.**

Dans le (1), f désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est défini si et seulement si α est strictement positif. Calculer $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

b) Soit $s = i\beta$, où $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que, lorsque X tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, e^{-Xs} n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$.

c) Soit $s = \alpha + i\beta$. Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini si et seulement si $\alpha > 0$. Calculer $\mathcal{L}(f)(s)$ pour $s \in \Pi(0)$.

Indication : on commencera par déterminer $|e^z|$ lorsque z est un complexe.

(2) **Abcisse de convergence.**

Soit $f \in \mathcal{C}$.

a) Soit $s = \alpha_0 + i\beta_0 \in \mathcal{DL}(f)$. on pose, pour tout réel x , $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x e^{-ts_0} f(t) dt.$$

Soit $s \in \Pi(\alpha_0)$. Montrer que s appartient à $\mathcal{DL}(f)$ et que :

$$\mathcal{L}(f)(s) = (s - s_0) \int_0^{+\infty} e^{-x(s-s_0)} F(x) dx.$$

Indication : on pourra procéder à une intégration par parties.

b) Montrer qu'il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Si $\Re(s) > \sigma$, $\mathcal{L}(f)(s)$ est défini ;
- (ii) Si $\Re(s) < \sigma$, $\mathcal{L}(f)(s)$ n'est pas défini.

Ce σ est appelé abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$. On la notera $\sigma(f)$ lorsque l'on voudra marquer sa dépendance vis à vis de f .

c) Montrer que, si f est à valeurs réelles positives ou nulles et si $s \in \Pi(\sigma)$, l'application $t \mapsto e^{-ts}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Deuxième exemple.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et f définie par : $f(x) = e^{\lambda x}$.

Déterminer $\mathcal{DL}(f)$, $\sigma(f)$ et $\mathcal{L}(f)$.

(4) Propriétés de $\mathcal{L}(f)$.

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) < +\infty$.

a) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f))$.

Indication : On pourra utiliser 2a.

b) On pose pour $s = \alpha + i\beta \in \Pi(\sigma(f))$: $L(\alpha, \beta) = \mathcal{L}(f)(s)$.

Montrer que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha > \sigma(f)\}$.

Montrer aussi que $\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = - \int_0^{+\infty} x e^{-xs} f(x) dx$.

Indication : On pourra utiliser 2a.

c) Montrer que sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donner pour $k \in \mathbb{N}$, une expression intégrale de la dérivée d'ordre k de $\mathcal{L}(f)$, notée $\mathcal{L}(f)^{(k)}$.

d) Montrer que $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$ par valeurs réelles.

Indication : On pourra utiliser 2a. On pourra ensuite introduire un réel η tel que $|F(x)| \leq \epsilon$ pour $x \in [0, \eta]$, puis écrire :

$$\int_0^\infty e^{-x(s-s_0)} F(x) dx = \int_0^\eta e^{-x(s-s_0)} F(x) dx + \int_\eta^{+\infty} e^{-x(s-s_0)} F(x) dx.$$