Les séries de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique paire telle que $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ si $t \in [0, \pi]$.

a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

Solution : $a_0 = 0$, $a_n = \frac{4}{(\pi n)^2}((-1)^{n+1} + 1)$ et $b_n = 0$ puisque f est paire.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

Solution : f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc sa série de Fourier converge ; de plus elle est continue, on en déduit que la série de Fourier converge vers f en tout $x \in \mathbf{R}$.

c) Déterminer les sommes des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Solution : on calcule $f(0)$ et on en déduit $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2 *Polynômes de Bernoulli*

1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes B_p tels que

i) $B_0(t) = 1$,

ii) $B_p' = pB_{p-1}$

iii) $\int_0^1 B_p(t)dt = 0$ si $p \geq 1$.

Solution : on le démontre par récurrence

– pour $n = 0$, B_0 est bien défini de manière unique ;

– soit n tel que B_n existe, soit défini de manière unique et soit de degré n ; on peut alors construire B_{n+1} de manière unique.

On a $B_{n+1}' = B_n$, donc B_{n+1} est déterminé à une constante près. Si $B_n = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$, alors $B_{n+1} = n(\frac{a_n}{n+1}X^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2}X^2 + a_0X) + K$ est bien de degré $n+1$ et la condition $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$ permet de déterminer explicitement K.

2) Calculer B_1, B_2 et vérifier que B_p est un polynôme de degré p.

Solution : $B_1 = X - \frac{1}{2}$, $B_2 = 2(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}) = X^2 - X + 6)$

3) On pose $b_p = B_p(0)$. Montrer que :

a) $B_p(x) = \sum_{0\leq m\leq p} \binom{p}{m} b_m x^{p-m}$ (on pourra appliquer une formule de Taylor à B_p en 0).

Solution : la formule de Taylor appliquée à B_p en 0 à l'ordre p permet d'écrire

$$B_p(x) = B_p(0) + xB_p'(0) + \cdots + \frac{x^p}{p!}B_p^{(p)}(0)$$

et par la propriété *ii)*, on a $B_p^{(m)}(0) = \frac{p!}{(p-k)!}B_m(0) = \frac{p!}{(p-m)!}b_m$, d'où la formule recherchée.

b) $B_p(x) = (-1)^pB_p(1-x)$.

Solution : soit $Q_p(x) = (-1)^pB_p(1-x)$; on vérifie que $Q_0(x) = 1$, $Q_p'(x) = (-1)^{p+1}B_p'(1-x) = (-1)^{p-1}pB_{p-1}(1-x) = pQ_{p-1}(x)$ et

$$\int_0^1 Q_p(t)dt = (-1)^p \int_0^1 B_p(1-t)dt = (-1)^{p+1} \int_1^0 B_p(t)dt = 0$$

si $p \geq 1$.

Comme B_p est la seule suite de polynômes vérifiant ces propriétés, on en déduit que $B_p(x) = Q_p(x) = (-1)^pB_p(1-x)$.

c) En calculant $B_p(1)$, en déduire que $b_p \in \mathbf{Q}$.

Solution : $B_p(1) = \sum_{0\leq m\leq p} \binom{p}{m} b_m = (-1)^pB_p(0) = (-1)^pb_p$; d'autre part, $B_p(1) = b_p$ pour $p \geq 2$ en considérant les propriétés *ii)* et *iii)*. On en déduit que $b_p = 0$ si $p \geq 1$ est impair et, par récurrence, que b_p est rationnel si p est pair.

4) On considère la fonction 1-périodique suivante : $\tilde{B}_p(x) = B_p(x - E(x))$.

a) En utilisant la formule ii), montrer que le n-ième-coefficient de Fourier de $\tilde{B}_p$, pour $p \geq 1$, est

$$c_n(p) = -\frac{p!}{(2i\pi n)^p} \text{ si } n \neq 0 \quad \text{ et } \quad c_0(p) = 0 \quad .$$

Solution : $c_0(p) = 2\int_0^1 B_p(x)dx = 0$ par définition de B_p ;

$$\begin{aligned} c_n(p) &= \int_0^1 B_p(x)e^{-2i\pi nx}dx \\ &= [-B_p(x)\frac{e^{-2i\pi nx}}{2i\pi n}]_0^1 + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^1 B_p'(x)e^{-2i\pi nx}dx \\ &= \frac{p}{2i\pi n}\int_0^1 B_{p-1}(x)e^{-2i\pi nx}dx \\ &= \frac{p!}{(2i\pi n)^{p-1}}\int_0^1 B_1(x)e^{-2i\pi nx}dx \\ &= -\frac{p!}{(2i\pi n)^p} \end{aligned}$$

b) En déduire que

$$\begin{aligned} B_{2k}(x) &= \frac{(-1)^{k-1}2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2k}} \\ B_{2k+1}(x) &= \frac{(-1)^{k+1}2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2k+1}} \quad . \end{aligned}$$

Solution : les fonctions $\tilde{B}_p$ sont continues sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on en déduit que leurs séries de Fourier convergent et pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} B_{2k}(x) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(2k)e^{2i\pi nx} \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} -\frac{(2k)!}{(2i\pi n)^{2k}}e^{2i\pi nx} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{2\cos(2\pi nx)}{n^{2k}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(x) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(2k+1)e^{2i\pi nx} \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} -\frac{(2k+1)!}{(2i\pi n)^{2k+1}}e^{2i\pi nx} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n\geq 1}\frac{2\sin(2\pi nx)}{n^{2k+1}} \end{aligned}$$

c) Montrer que les nombres $\dfrac{1}{\pi^{2k}}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}}$ et $\dfrac{1}{\pi^{2k}}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{2k}}$ sont des nombres rationnels et les expliciter.

Solution : pour $x = 0$, on obtient $B_{2k}(0) = b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^{2k}}$ qui est un rationnel, d'où $\dfrac{1}{\pi^{2k}}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{b_{2k}}{(2k)!}$ et pour $x = \frac{1}{2}$,

$$B_{2k}(\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^n)}{n^{2k}}$$

qui est un rationnel car tous les coefficients de B_{2k} sont rationnels, d'où

$$\frac{1}{\pi^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\sum_{0\leq m\leq 2k}\binom{2k}{m}b_m(\frac{1}{2})^{2k-m} \in \mathbf{Q}.$$

Trigonalisation

Exercice 3 *Trigonalisation d'un endomorphisme sur* $\mathbf{C}$

On considère E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$ et u un endomorphismede E. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres toutes distinctes de u, $P_u(X) = \prod_{1\leq i\leq r}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ le polynôme caractéristique de u et $m_u(X) = \prod_{1\leq i\leq r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynôme minimal.

1) Soit $F_i = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i id)^{\alpha_i}$, l'espace caractéristique associé à λ_i ; montrer que la dimension de F_i est β_i et que $F_i = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i id)^{\beta_i}$.

2) Le but de cette question est de montrer que u est la somme de deux endomorphismes d et n, où d est diagonalisable, n est nilpotent et d et n commutent entre eux.

a) On note v_i la projection sur F_i parallèlement à $\oplus_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} F_j$; rappeler pourquoi v_i et u commutent.

b) Montrer que $n_i = v_i \circ u - \lambda_i v_i$ est nilpotent ($n_i^{\alpha_i} = 0$).

c) On pose $d = \sum_{1\leq i\leq r}\lambda_i v_i$; montrer que d est diagonalisable et que $d \in K[u]$.

d) De même, montrer que $n = \sum_{1\leq i\leq r} n_i \in K[u]$ et que n est nilpotent.

e) Conclure.

3) Il s'agit de montrer ici l'unicité du couple (d,n) tel que $u = d+n$ où d estdiagonalisable, n est nilpotent et d et n commutent entre eux.

a) Soit (d,n) le couple construit dans la question précédente et (d',n') vérifiant lespropriétés ci-dessus. Montrer que d' et n' commutent avec u, puis avec d et n.

b) En déduire que $d-d'$ est diagonalisable et que $n-n'$ est nilpotent.

c) Conclure.

4) Exemple : on se place dans $\mathbf{C}^4$ muni de la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) et on veut appliquer la méthode ci-dessus à l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les sous-espaces caractéristiques.

b) Expliciter les endomorphismes v_i, n_i et d_i comme des polynômes en u.

c) En déduire d et n.

Propriétés affines ou euclidiennes

Exercice 4

Soit V l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à deux. Soit E l'ensemble des polynômes de V tels que $\int_0^1 P(x)dx = 0$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de V. En donner une base.

b) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes P de V tels que $\int_0^1 P(x)dx = 1$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un plan affine de direction E.

c) Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application définie par $\phi(P)(x) = P(1-x)$. Montrer que ϕ est une application affine de $\mathcal{E}$.

d) Montrer que $\phi\circ\phi = Id$ et que l'ensemble des points fixes de $\mathcal{E}$ est une droite affine dont on précisera un point et la direction.

Exercice 5

Parmi les propriétés ou énoncés suivants, lesquels ont un caractère affine et lesquels sont de nature euclidienne ?

a) le théorème de Thales ;

b) le théorème de Pythagore ;

c) I est le milieu du segment $[AB]$;

d) l'application f est un projecteur ; une symétrie ;
e) l'image d'une ellipse par une application affine est une ellipse ou un segment ;
f) l'intersection d'une droite et d'un cercle est soit vide, soit 1 point, soit 2 points ;
g) l'application f est un endomorphisme orthogonal.

Questions
a) Que suffit-il de connaître pour déterminer complètement une application affine du plan ou de l'espace ? Et s'il s'agit d'une isométrie ? d'un déplacement ? d'une similitude directe du plan ?
b) Une application transformant toute droite en une droite est-elle affine ?